ALESSANDRO LANGUASCO

ANALISI MATEMATICA 1

Soluzione di alcuni esercizi proposti

EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO

via Hoepli 5, 20121 Milano (Italy)
tel. +39 02 864871 fax +39 02 8052886
e-mail hoepli@hoepli.it

www.hoepli.it

Indice

Nota introduttiva

2 Esercizi del capitolo 2 1

3 Esercizi del capitolo 3 4

4 Esercizi del capitolo 4 6

5 Esercizi del capitolo 5 8

6 Esercizi del capitolo 6 9

7 Esercizi del capitolo 7 11

8 Esercizi del capitolo 8 14

9 Esercizi del capitolo 9 15

10 Esercizi del capitolo 10 17

11 Esercizi del capitolo 11 19

12 Esercizi del capitolo 12 20

13 Esercizi del capitolo 13 23

14 Esercizi del capitolo 14 25

15 Esercizi del capitolo 15 27

16 Esercizi del capitolo 16 28

Colleziono qui alcune soluzioni degli esercizi proposti nel mio testo "Analisi Matematica 1, teoria ed esercizi", edito da Hoepli e pubblicato nel 2017. Quando in questa parte menzionerò un testo non meglio specificato, intenderò riferire al libro sopra indicato; inoltre, per comodità del lettore, utilizzerò qui la numerazione dei capitoli e degli esercizi là usata.

Non ho incluso le soluzioni di tutti i testi di esercizi presenti nel libro perché ritengo che gli studenti debbano tentare di risolverli autonomamente.

In alcuni casi, quando nel testo sono già presenti molti esercizi ed esempi svolti su un particolare argomento, qui suggerisco solamente la linea risolutiva; è il caso degli esercizi sullo studio di funzione, sul calcolo delle primitive mediante integrazione per parti, per sostituzione, con il metodo dei fratti semplici e anche di qualche esercizio "standard" sulla formula di Taylor.

Eventuali commenti e segnalazioni relative a errori di stampa possono essere segnalati a:
Prof. Alessandro Languasco, Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita", via Trieste 63, 35121 Padova; email: `languasco@math.unipd.it`.

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 2

E-2.1. Da quanto visto nel testo sappiamo che $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo che per $n = 0$ la formula del testo dell'esercizio è verificata. La si supponga vera per n. Utilizzando tale ipotesi induttiva si ha che

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\Big(\frac{n^2}{4} + n + 1\Big) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Il passo induttivo è pertanto verificato. Il principio di induzione permette quindi di concludere che $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\sum_{k=0}^{n} k)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

E-2.2. Per provare la prima parte basta osservare che, grazie all'ipotesi dell'esercizio, sia ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{(2n+1)^2}{8} + (n+1) = \frac{(2n+1)^2 + 8n + 8}{8} = \frac{4n^2 + 12n + 9}{8} = \frac{(2n+3)^2}{8}.$$

Quanto sopra può essere quindi interpretato come il fatto che il passo induttivo del principio di induzione sia verificato. È però immediato notare che il passo base del principio di induzione non è verificato per $n = 0$: infatti si dovrebbe avere che $0 = 1/8$; un fatto chiaramente falso. Quindi il principio di induzione non è applicabile. Inoltre, da quanto visto nel testo, sappiamo che $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; pertanto $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{(2n+1)^2}{8}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ se e solo se $\frac{(2n+1)^2}{8} = \frac{n(n+1)}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mediante facili calcoli algebrici, l'ultima uguaglianza equivale a $1 = 0$. Pertanto l'affermazione $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{(2n+1)^2}{8}$ è falsa per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

E-2.4. 1) È vera. Se $x \in \mathbb{Q}$ allora $x = a/b$ con $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ e $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$. Da $x^2 \in \mathbb{N}$ abbiamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^2/b^2 = n$, ossia $a^2 = nb^2$. Se $a = 0$ allora $a/b = 0 \in \mathbb{Z}$. Se $a \neq 0$ e p è un numero primo che divide a, allora p^2 divide a^2 e quindi p^2 divide n dato che p non può dividere b. Quindi $n \neq 0$ è un multiplo di a^2; pertanto esiste $c \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$, tale che $n = ca^2$. Da questo segue che $a^2 = ca^2b^2$; pertanto $1 = cb^2$ e quindi b^2 è un numero naturale invertibile secondo il prodotto usuale. Quindi $b^2 = 1$ da cui segue $b = 1$ perché $b \in \mathbb{N}$. Allora $x = a/b = a \in \mathbb{Z}$. Quanto sopra prova la prima inclusione. L'altra inclusione è ovvia. 2) È falsa. Infatti $x = 1$ e $x = -1$ appartengono entrambi all'insieme specificato. 3) È falsa. Se $x/2 \in \mathbb{Z}$ allora esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $x/2 = n$, ossia $x = 2n$. Pertanto $x \in \mathbb{Z}$ e x è pari. Chiaramente 3 non può appartenere a tale insieme. 4) È falsa. Si consideri $x = \sqrt{2}$. Tale x appartiene al primo insieme ($x^2 = 2 \in \mathbb{Q}$) ma $x^3 = 2\sqrt{2}$ non appartiene al secondo. Infatti se vi appartenesse allora esisterebbe $q \in \mathbb{Q}$ tale che $2\sqrt{2} = q$ da cui seguirebbe $\sqrt{2} = q/2 \in \mathbb{Q}$; ciò è falso per quanto abbiamo visto nel testo. Pertanto $x^3 \notin \mathbb{Q}$ e quindi x non appartiene al secondo insieme. ■

E-2.5. Perché il secondo insieme abbia senso dobbiamo porre $a \neq 0$. Si noti che $ax + b > 0$ equivale a $ax > -b$. Se $a > 0$, ciò significa che $x > -b/a$. Se $a < 0$, ciò significa che $x < -b/a$ ossia $x + (b/a) < 0$. Pertanto i due insiemi in questione sono uguali per ogni $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$. ■

E-2.6. No. Sia $a = 0$; la disequazione equivale a $0 \leq \frac{1}{2x}$ ossia $x > 0$. Si noti che anche supponendo che $a > 0$ la conclusione è falsa; infatti se $x < 0$ la disequazione del testo dell'esercizio equivale a $2\sqrt{a}x \geq ax^2 + 1$, ossia $(\sqrt{a}x - 1)^2 \leq 0$. Di conseguenza $x = 1/\sqrt{a} > 0$; ma $x < 0$ e pertanto non ci sono soluzioni. ■

E-2.7. No. Basta prendere $A = \mathbb{Z}$. ■

E-2.8. La risposta alla prima parte è no. Basta prendere $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$ oppure $A = (1, 2), B = (0, 1) \cup (1, 2)$. Dimostriamo la seconda parte. Se A non è inferiormente limitato allora anche B non è inferiormente limitato (se B fosse inferiormente limitato allora anche A lo sarebbe e quindi, per contraddizione . . .); pertanto $\inf A = \inf B = -\infty$. Sia A inferiormente limitato; allora esiste $\lambda_A \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda_A = \inf A$. Se B non è inferiormente limitato, la conclusione è ovvia. Sia B inferiormente limitato; allora esiste $\lambda_B \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda_B = \inf B$. Ma allora $\lambda_B \leq b$ per ogni $b \in B$ (λ_B è un minorante di B) e quindi $\lambda_B \leq a$ per ogni $a \in A \subseteq B$. Quindi λ_B è un minorante di A e allora $\lambda_B \leq \lambda_A$ perché λ_A è il massimo dei minoranti di A. La dimostrazione della terza parte è analoga e la si lascia al lettore diligente. ■

E-2.10. Supponiamo che A non sia inferiormente limitato ossia per ogni $K \in \mathbb{R}$ esiste $a \in A$ tale che $a < K$. Quindi $-A$ non è superiormente limitato; se per contraddizione lo fosse allora esisterebbe $M \in \mathbb{R}$ per cui $b \leq M$ per ogni $b \in (-A)$. Ma $b = -a$ e quindi avremmo $-a \leq M$ da cui segue $a \geq -M$ per ogni $a \in A$. Ossia A sarebbe inferiormente limitato; in contraddizione con quanto sopra. Pertanto abbiamo provato che se $\inf A = -\infty$ allora $\sup(-A) = +\infty$. In modo simile si prova che se $\sup A = +\infty$ allora $\inf(-A) = -\infty$. Supponiamo che A sia inferiormente limitato cioè esiste $\lambda_A \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda_A = \inf A$. Pertanto $\lambda_A \leq a$ per ogni $a \in A$. Quindi $-\lambda_A \geq -a$ per ogni $a \in A$, ossia $-\lambda_A$ è un maggiorante dell'insieme $-A$. Pertanto $\sup(-A) = \min M_{(-A)} \leq -\lambda_A$. Se si avesse che $\Lambda_{(-A)} = \sup(-A) < -\lambda_A$, allora $-a \leq \Lambda_{(-A)} < -\lambda_A$ per ogni $a \in A$ e quindi $a \geq -\Lambda_{(-A)} > \lambda_A$ per ogni $a \in A$. Ossia $\lambda_A \neq \inf A$ perché $-\Lambda_{(-A)}$ è un minorante di A più grande di λ_A. Ma questo contraddice la definizione di λ_A. Quindi $\sup(-A) = -\lambda_A = -\inf A$. L'altra relazione si dimostra in modo simile. ■

E-2.11. 1) Sia X l'insieme in questione e si noti che $\frac{40n}{64+n^2} \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $0 \in X$ si ha che $\min X = 0$. Sia ora $a_n = \frac{40n}{64+n^2}$; la risoluzione della disequazione $a_n \leq a_{n+1}$ fornisce $n \leq 7$. Pertanto $a_k \leq a_8$ per ogni $k \in \{0, \dots, 7\}$ e $a_k \geq a_8$ per ogni $k \geq 8$, $k \in \mathbb{N}$. Quindi $a_8 = 1/4$ è un maggiorante di X. Essendo $a_8 \in X$ si ha che $\max X = a_8 = 1/4$. 2) Sia X l'insieme in questione. Posto $a_n = 2^n - 100n$ si osservi che $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \geq 9$. Quindi X è inferiormente limitato e $\inf X = \min\{a_0, \dots a_9\} = \min\{1, -98, -196, -292, -384, -468, -536, -572, -544, -388\}$. Un facile calcolo mostra che $\inf X = a_7 = -572 = \min X$. Osservando anche che $2^{n-1} \leq a_n$ per ogni $n \geq 12$, otteniamo che X non è superiormente limitato (se lo fosse allora anche $\{2^{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 12\}$ lo sarebbe e quindi anche $\mathbb{N}$ lo sarebbe). Pertanto $\sup X = +\infty$. 3) Sia X l'insieme in questione; si osservi che $\frac{x^2+10}{x^2+1} = 1 + \frac{9}{x^2+1}$. Dal fatto che $x^2 + 1 \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ segue che X è superiormente limitato e che $10 \in X$ è un maggiorante. Inoltre, siccome $\frac{9}{x^2+1} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che 1 è un minorante di X. La verifica che $1 = \inf X$, che $10 = \sup X = \max X$ e che X non ha minimo si effettua con la caratterizzazione degli estremi superiori e inferiori vista nel testo. 4) Sia X l'insieme in questione e $f(x) = |x|^7 - x^8$. Osserviamo che $f(-x) = f(x)$ e quindi per risolvere il problema è sufficiente studiare $Y = \{x^7 - x^8 : x \geq 0\}$. Osserviamo che $x^7 - x^8 = x^7(1-x)$ per $x > 0$ e $x^7 - x^8 = 0$ per $x = 0$. Sia $x > 1$; allora $x^7(1-x) < 1 - x$. Poiché $\{1 - x : x > 1\}$ non è inferiormente limitato (se lo fosse allora anche la semiretta $(1, +\infty)$ lo sarebbe) si ottiene che $\inf X = -\infty$. Lo studio del segno di $x^7(1-x)$ per $x \in [0, 1]$ rivela che $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0, 1$ e che $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (0, 1)$. Inoltre $x^7(1-x) \leq (1-x) \leq 1$ per $x \in [0, 1]$. Quindi X è superiormente limitato e $\sup X \leq 1$. Per poter concludere sul fatto che X ammetta massimo serve il teorema di Weierstraß sulla continuità di $f(x)$ in $[0, 1]$. Per determinare che $\max X = 7^7/8^8$, raggiunto nel punto $7/8$, servono i teoremi del calcolo differenziale. ■

E-2.12. Le disequazioni del testo equivalgono a $-\frac{3x^2+1}{2} \leq 2x^2 - \frac{1}{2} \leq \frac{6x^2+2}{3}$ ossia al sistema $-3x^2 - 1 \leq 4x^2 - 1$; $6x^2 - 3/2 \leq 6x^2 + 2$. Risolvendo il sistema si ottiene $7x^2 \geq 0$; $-3/2 \leq 2$ le cui soluzioni sono tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Ricordando la definizione di E, quanto sopra significa che E è limitato. Inoltre $2/3 \in M_E$ e $-1/2 \in m_E$; quindi $\sup E \leq 2/3$ e $\inf E \geq -1/2$. Inoltre è facile osservare che $-1/2 \in E$. Sia $\varepsilon > 0$; osserviamo che $-1/2 + \varepsilon \notin m_E$; infatti risolvendo $\frac{2x^2 - \frac{1}{2}}{3x^2+1} < -1/2 + \varepsilon$ si trovano soluzioni reali non banali in dipendenza di ogni $\varepsilon > 0$. Pertanto $\inf E = \min E = -1/2$. Notiamo adesso che $-2/3 \notin E$. Sia $\varepsilon > 0$; osserviamo che $2/3 - \varepsilon \notin M_E$; infatti risolvendo $\frac{2x^2 - \frac{1}{2}}{3x^2+1} > 2/3 - \varepsilon$ si trovano soluzioni reali non banali in dipendenza di ogni $\varepsilon > 0$. Quindi $\sup E = 2/3$ ma non esiste $\max E$. ■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 3

E-3.2. Osserviamo che $|x - |x+1|| < 2$ equivale a $-2 < x - |x+1| < 2$ ossia $x+2 > |x+1| > x-2$. La prima disequazione equivale a $x+2 > x+1 > -x-2$ le cui soluzioni sono $x > -1/2$. La seconda ha come soluzioni l'unione delle soluzioni di $x+1 > x-2$; $x+1 \geq 0$ con quelle di $x+1 < -x+2$; $x+1 < 0$. Si ottiene l'unione di $[-1, +\infty)$ con $(-\infty, -1)$; ossia $\mathbb{R}$. In conclusione $A = (-1/2, +\infty)$. Determiniamo B_k. Per $x < 0$ la disequazione $\log(-x) < k$ equivale a $-x < e^k$ ossia $x > -e^k$. Pertanto $B = (-e^k, 0)$. Affinché $B_k \subseteq A$ dobbiamo quindi porre che $-e^k \geq -1/2$ che equivale a $k \leq -\log 2$. Pertanto $C = (-\infty, -\log 2]$ che è un intervallo non contenente 0. ∎

E-3.3. $0 \in A$ perché $f(0) = 0$. Osserviamo inoltre che per $x > 0$ si ha che $-1 < f(x) < 0$ e che per $x < 0$ si ha $f(x) > 0$. Non è difficile verificare che $\mathcal{I}(f) = (-1, +\infty)$ e quindi $A = (-1, +\infty)$. Evidentemente $B = (-\infty, -1]$ e $C = \emptyset$. Si invita il lettore a concludere l'esercizio. ∎

E-3.9. Forniamo solo le risposte di alcune delle disequazioni: 3) $[k\pi, \pi/2 + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $(-\infty, -1) \cup (1/7, +\infty)$; 7) $(-1, -1/\sqrt{2}]$; 9) $[\pi/4 + k\pi, \pi/2 + k\pi) \cup (-\pi/2 + k\pi, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; 10) $[2k\pi, \pi/2 + 2k\pi) \cup (2/3\,\pi + 2k\pi, 4/3\,\pi + 2k\pi) \cup (3/2\,\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. ∎

E-3.10. Per prima cosa va determinato il dominio di esistenza D del lato sinistro; esso è $-1 \leq 2^x - 1 \leq 1$ ossia $0 \leq 2^x \leq 2$. La stretta crescenza della funzione esponenziale di base $a = 2 > 1$ implica che $D = (-\infty, 1]$. Per tali x va ora risolto $-\pi/4 \leq \arcsin(2^x - 1) \leq \pi/4$. Grazie alla stretta crescenza della funzione $\sin u$ per $u \in [-\pi/4, \pi/4]$ e al fatto che sin e arcsin in tali intervalli siano una la funzione inversa dell'altra, segue che $-\sqrt{2}/2 = \sin(-\pi/4) \leq 2^x - 1 \leq \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, ossia $1 - \sqrt{2}/2 \leq 2^x \leq 1 + \sqrt{2}/2$. Osserviamo che $1 - \sqrt{2}/2 > 0$ e $1 + \sqrt{2}/2 < 2$; pertanto i valori di di x ottenuti risolvendo l'ultima disequazione appartengono ad D. Utilizzando la stretta crescenza della funzione logaritmo di base $a = 2 > 1$, abbiamo che $\log_2(1 - \sqrt{2}/2) \leq x \leq \log_2(1 + \sqrt{2}/2)$. In conclusione, tali valori di x sono quelli che risolvono la disequazione data. ∎

E-3.12. Il dominio $\mathcal{D}(f)$ è l'intersezione dei domini delle varie funzioni che, tra loro composte, formano f: va quindi risolto il sistema $\frac{x+1}{x-1} > 0$; $x - 1 \neq 0$. Ricordando che una frazione ha segno positivo nel caso in cui denominatore e numeratore abbiano segno concorde, si perviene a $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. La casistica richiesta dipende dal segno dell'argomento del valore assoluto: va quindi studiato il sistema $x \in \mathcal{D}(f)$; $\log_2 \frac{x+1}{x-1} \geq 0$. La seconda disequazione equivale a $\frac{x+1}{x-1} \geq 1$ cioè a $\frac{x+1-x+1}{x-1} \geq 0$, ossia a $\frac{2}{x-1} \geq 0$. Le soluzioni della seconda disequazione sono quindi date da $x > 1$. Pertanto $\log_2 \frac{x+1}{x-1} \geq 0$ se solo se $x > 1$ e inoltre ragionamenti analoghi permettono di ottenere che $\log_2 \frac{x+1}{x-1} < 0$ se solo se $x < -1$. Pertanto, per $x > 1$, si ha $f(x) = 2^{\log_2 \frac{x+1}{x-1}} = \frac{x+1}{x-1}$ e, per $x < -1$, si ottiene $f(x) = 2^{-\log_2 \frac{x+1}{x-1}} = 2^{\log_2 \frac{x-1}{x+1}} = \frac{x-1}{x+1}$. Per determinare il segno di f è sufficiente notare che la funzione più esterna è un esponenziale di base diversa da 1; quindi $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$. Osservando inoltre che $|\log_2 \frac{x+1}{x-1}| \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, la monotònia dell'esponenziale di base

$2 > 1$ ci permette di concludere che $f(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathscr{D}(f)$. Infine, siccome $|\log_2 \frac{x+1}{x-1}| \neq 0$ per ogni $x \in \mathscr{D}(f)$, concludiamo che $f(x) > 1$ per ogni $x \in \mathscr{D}(f)$. ■

E-3.14. Il dominio $\mathscr{D}(f)$ è determinato risolvendo il sistema $x - \sqrt{x^2 - 2x} > 0$; $x^2 - 2x \geq 0$. La seconda disequazione equivale a $x(x-2) \geq 0$ le cui soluzioni sono $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) =: A$. La prima disequazione equivale a $x > \sqrt{x^2 - 2x}$ che, per $x \in A$, diviene $x^2 > x^2 - 2x$, grazie alla stretta crescenza della funzione quadrato che è l'inversa della funzione radice quadrata (ben definita per $x \in A$). Pertanto, per $x \in A$, questa equivale a $x > 0$. In conclusione $\mathscr{D}(f) = (0, +\infty) \cap A = [2, +\infty)$. Per studiare il segno di $f(x)$ va risolta, per $x \in \mathscr{D}(f)$, la disequazione $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 2x}) > 0$. Equivalentemente, per la stretta crescenza della funzione esponenziale di base $a = 2 > 1$, si ha che $x \in \mathscr{D}(f)$ deve verificare $x - \sqrt{x^2 - 2x} > 1$ che corrisponde a $x - 1 > \sqrt{x^2 - 2x}$. Siccome $x \in \mathscr{D}(f)$ entrambi i lati dell'ultima disequazione sono non negativi e quindi essa equivale, per $x \in \mathscr{D}(f)$, a $(x-1)^2 > x^2 - 2x$, grazie alla stretta crescenza della funzione quadrato. L'ultima disequazione equivale a $1 > 0$ che è verificata per ogni $x \in \mathscr{D}(f)$. In conclusione, $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathscr{D}(f)$. ■

E-3.20. Suggeriamo la strada da seguire. Dopo aver determinato il dominio di f, che risulta essere $x \in [1, 3]$, si osservi che il grafico di $g(x) := \arcsin(x - 2)$ si ottiene da quello di $\arcsin(u)$ traslandolo in modo rigido verso destra di 2 unità. Dopo aver disegnato il grafico di g, quello di f si ottiene ribaltando rispetto all'asse delle ascisse la parte negativa del grafico di g e lasciandone invariata la parte positiva. ■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 4

E-4.4. No. Ad esempio $f(x) = 1/(x-1)$ per ogni $x \in [-1, 1)$, $f(1) = 0$, non è inferiormente limitata su su $[-1, 1]$ ma per ogni $x_0 \in (-1, 1)$ esiste finito $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Sulla stessa falsariga non è difficile costruire esempi di funzioni non superiormente limitate e di funzioni non limitate. ∎

E-4.5. La prima parte ha risposta affermativa; basta osservare che se esistono $M_A, M_B \in \mathbb{R}$ tali che $|f(a)| \leq M_A$ per ogni $a \in A$ e $|f(b)| \leq M_B$ per ogni $b \in B$ allora si ha che $|f(c)| \leq \max(M_A; M_B)$ per ogni $c \in A \cup B$. La seconda parte ha risposta negativa: siano $A_k = (1/k, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, e $f(x) = 1/x$. Allora f è limitata su A_k per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ ma f non è limitata su $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = (0, 1)$. ∎

E-4.10. Suggeriamo la linea di ragionamento da usare. Sono tutti esercizi che richiedono l'applicazione dei teoremi sul confronto dei limiti, o il teorema delle tre funzioni. Per risolvere i punti relativi a f_3 e a f_6 conviene esprimere i limiti dati mediante la definizione e poi ragionare usando i teoremi sul confronto dei limiti, o il teorema delle tre funzioni. ∎

E-4.11. Si osservi che $|\cos x - 3| = 3 - \cos x$ grazie alle proprietà della funzione coseno. Per determinare $\mathcal{D}(f)$ va impostato il sistema $\frac{2\sin^2 x - \cos x - 1}{3 - \cos x} > 0$; $3 - \cos x \neq 0$. La seconda disequazione è ovviamente verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $3 - \cos x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ per le proprietà della funzione coseno. Quindi $x \in \mathcal{D}(f)$ se solo se $2\sin^2 x - \cos x - 1 > 0$. Per il teorema di Pitagora ciò equivale a $2\cos^2 x + \cos x - 1 < 0$. Posto $u = \cos x$ si ottiene $u \in (-1, 1/2)$. Dobbiamo quindi risolvere $\cos x \neq -1$, che fornisce $x \notin \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, e $\cos x < 1/2$. Restringiamo per il momento la nostra attenzione a $x \in [0, 2\pi)$ e risolviamo l'ultima disequazione. Ricordando che $\cos x = 1/2$ se e solo se $x = \pi/3$ o $x = 5\pi/3$ grazie alla monotònia della funzione coseno, otteniamo che $x \in (\pi/3, 5\pi/3)$. La periodicità della funzione coseno ci assicura quindi che l'ultima disequazione ha come soluzione l'insieme $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\pi/3 + 2k\pi, 5\pi/3 + 2k\pi)$. Pertanto $\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\big((\pi/3 + 2k\pi, 5\pi/3 + 2k\pi) \setminus \{\pi + 2k\pi\}\big)$. La disequazione $f(x) \leq 0$ equivale a $0 < \frac{2\sin^2 x - \cos x - 1}{3 - \cos x} \leq 1$ grazie alla stretta crescenza della funzione logaritmo di base $e > 1$. La disequazione a sinistra significa che $x \in \mathcal{D}(f)$ mentre quella a destra equivale a $2\sin^2 x - \cos x - 1 \leq 3 - \cos x$, grazie al fatto che $3 - \cos x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Una facile manipolazione algebrica riconduce quest'ultima a $\sin^2 x \leq 2$ che è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ grazie al fatto che $-1 \leq \sin x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi concludere che $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$. L'equazione $f(x) = 0$ equivale al sistema $\frac{2\sin^2 x - \cos x - 1}{3 - \cos x} = 1$; $x \in \mathcal{D}(f)$. Calcoli analoghi al caso precedente conducono a risolvere $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 3 - \cos x$, ossia a $\sin^2 x = 2$ che, chiaramente, è priva di soluzioni. Pertanto $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$. Si lascia al lettore la verifica che 0 non è punto di accumulazione per $\mathcal{D}(f)$ e che $\pi/2$ è punto di accumulazione per $\mathcal{D}(f)$. Pertanto il limite in 0 di $f(x)$ non esiste. Per quanto riguarda il limite in $\pi/2$ conviene osservare che $\lim_{x\to\pi/2} \frac{2\sin^2 x - \cos x - 1}{3 - \cos x} = 1/3$ grazie alle proprietà delle funzioni seno e coseno e ai teoremi sui limiti di somma, prodotto e rapporto. Utilizzando il teorema di sostituzione dei limiti, si ha allora che $\lim_{x\to\pi/2} f(x) = \lim_{u\to 1/3} \log u = -\log 3$, per le note proprietà della funzione logaritmo. ∎

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 5

E-5.2. Gli esercizi si risolvono osservando i seguenti fatti: 1) $\frac{n^2+3n}{n^3-n^2} = \frac{n^2(1+3/n)}{n^3(1-1/n)}$ per $n \geq 2$; 2) $\frac{3n^4-4n^3+7n-5}{n^2-n+3} = \frac{n^4(3-4/n+7/n^3-5/n^4)}{n^2(1-1/n+3/n^2)}$ per $n \geq 1$; 3) $\left(\frac{n+3}{n-4}\right)^{n-2} = \left(1+\frac{7}{n-4}\right)^{n-4+2} = \left[\left(1+\frac{7}{n-4}\right)^{(n-4)/7}\right]^7 \left(1+\frac{7}{n-4}\right)^2$ per $n \geq 5$; 4) $\frac{4n^5+2n-1}{2n^5-n^3+n} = \frac{4+2/n^4-1/n^5}{2-1/n^2+1/n^4}$ per $n \geq 1$; 5) $\frac{\sqrt{n^2-2}-\sqrt{n^2+n}}{n+4} = -\frac{n+2}{(n+4)(\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2+n})} = -\frac{1+2/n}{1+4/n}\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2+n}}$ per $n \geq 2$; 6) $\frac{\sqrt[3]{n^2-2}-\sqrt[3]{n^2+n}}{n^4+2n+9}$ si razionalizza usando l'identità $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, dove $a = \sqrt[3]{n^2-2}$ e $b = \sqrt[3]{n^2+n}$; 7) $\left|\frac{\sqrt{7n+5}-\sqrt{7n-5}}{(-1)^{n^2}}\right| = \frac{10}{\sqrt{7n+5}+\sqrt{7n-5}}$ per $n \geq 1$; 8) $\frac{n^n}{e^{n^2}} = e^{n\log n - n^2} = e^{n^2(-1+(\log n)/n)}$ per $n \geq 1$. ■

E-5.6. Le prime sei ricorrenze sono tutte di ordine 1 e del tipo $a_k = f(a_{k-1})$. È necessario quindi studiare la monotonia di f ed i suoi punti fissi, ossia le soluzioni di $f(u) = u$. Risolviamo esplicitamente solo il secondo punto: sia $f(x) := \sqrt{x+2}$. Posto $x \geq -2$, l'unico punto fisso di f è 2 perché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq -2$. Osserviamo inoltre che f è strettamente crescente: se $-2 \leq x_1 < x_2$ allora $0 \leq x_1 + 2 < x_2 + 2$ e quindi $\sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2}$. Infine, siccome $a_0 = 0$, si ha che $a_1 = f(a_0) = \sqrt{2} > 0 = a_0$. I risultati noti su tali tipi di ricorrenze permettono allora di concludere che a_k è strettamente crescente. Pertanto $\lim_{k\to+\infty} a_k = \ell \in (0,+\infty) \cup \{+\infty\}$. Osserviamo infine che se $-2 < a_0 \leq 2$ allora $-2 < a_k \leq 2$ per ogni $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Lo dimostriamo per induzione: il passo base è dato da $a_1 > a_0 > -2$ e $a_1 = \sqrt{a_0+2} \leq \sqrt{2+2} = 2$; per il passo induttivo, supponiamo che $-2 < a_{k-1} \leq 2$; allora $a_k = f(a_{k-1}) > a_{k-1} > -2$, grazie alla stretta crescenza di f, ed inoltre $a_k = \sqrt{a_{k-1}+2} \leq \sqrt{2+2} = 2$. Pertanto il principio di induzione ci assicura che se $-2 < a_0 \leq 2$ allora $-2 < a_k \leq 2$ per ogni $k \geq 1$. In realtà è facile osservare che se $-2 < a_0 \leq 2$ allora $0 \leq a_k \leq 2$ per ogni $k \geq 1$ (lo si provi per induzione). Nel testo dell'esercizio è specificato che $a_0 = 0$; pertanto abbiamo che a_k è superiormente limitata da 2 ed è strettamente crescente. Di conseguenza $\lim_{k\to+\infty} a_k = \ell \in (0,2]$ grazie ai teoremi sui limiti delle funzioni monotòne. Possiamo quindi dire che $\ell \in (0,2]$ deve verificare $\ell = \sqrt{\ell+2}$ da cui segue $\ell = 2$ (si ricordino i punti fissi di f). In conclusione, per il secondo punto dell'esercizio abbiamo che $a_k \to 2$ per $k \to +\infty$. Tutti gli altri punti, tranne gli ultimi quattro, si svolgono con ragionamenti analoghi.

Le ultime quattro ricorrenze sono lineari autonome di ordine 2 e quindi ognuna delle rispettive soluzioni ammette una forma chiusa. Dobbiamo rispettivamente determinare le soluzioni dei polinomi $\lambda^2 - 2\lambda - 6 = 0$, $\lambda^2 - 6\lambda - 5 = 0$, $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ che hanno tutti due radici reali distinte λ_1, λ_2. Pertanto nei quattro casi sopra scritti si ottiene che $a_k = d_1\lambda_1^k + d_2\lambda_2^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza possiamo scrivere che $a_0 = d_1 + d_2$; $a_1 = d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2$ che è un sistema lineare nelle due indeterminate d_1, d_2 (a_0 e a_1 sono da considerare termini noti). Per trovare, in dipendenza dei dati iniziali a_0, a_1, la forma esplicita della soluzione a_k basta quindi determinare λ_1, λ_2 e risolvere in d_1, d_2 il sistema sopra descritto. ■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 6

E-6.1. Si, esiste. Ad esempio la funzione definita per casi come $f(x) = x$, se $x \in (0, 1]$, e $f(x) = 1/(x - 1)$, se $x \in (1, 2)$, ha $\mathcal{I}(f) = (0, +\infty)$ ed è facile provare che è iniettiva. Pertanto è invertibile. La funzione inversa si può facilmente calcolare ed è $f^{-1}(y) = y$ se $y \in (0, 1]$ e $f^{-1}(y) = 1/y + 1$ se $y \in (1, +\infty)$ da cui è immediato notare che la condizione sul limite è verificata. Osserviamo ora che se una funzione g fosse continua in $(0, 2)$, allora lo sarebbe anche in 1 e quindi, grazie al teorema di locale limitatezza, esisterebbe U_1', intorno di 1, per cui l'insieme $\{g(x) \colon x \in U_1' \cap (0, 2)\}$ sarebbe limitato. D'altra parte se g è invertibile e verifica che $\lim_{y\to+\infty} g^{-1}(y) = 1$, allora per ogni U_1, intorno di 1, esiste W, intorno di $+\infty$, per cui $g^{-1}(y) \in U_1$ per ogni $y \in W \cap \mathcal{D}(g^{-1})$; ma $\mathcal{D}(g^{-1}) = \mathcal{I}(g)$ e quindi quanto sopra si può riscrivere come: per ogni U_1, intorno di 1, esiste W, intorno di $+\infty$, per cui $x \in U_1$ per ogni $g(x) \in W$ e $x \in (0, 2)$. In particolare, ricordando che W è un intorno di $+\infty$, si ha che per ogni U_1, intorno di 1, l'insieme $\{g(x) \colon x \in U_1 \cap (0, 2)\}$ è superiormente illimitato. Si perviene così ad una contraddizione; di conseguenza la funzione g che verifica le condizioni presenti nel testo dell'esercizio non può essere continua in $(0, 2)$. ■

E-6.2. Osserviamo che $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Inoltre $f(0) = \cos\lambda$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = \cos\lambda$ e $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{u\to-\infty} e^{-u} = 0$ (per il teorema di sostituzione dei limiti). Pertanto f_λ è continua in 0 se e solo se $\cos\lambda = 0$; ossia $\lambda \in \{\pi/2 + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$. Inoltre f_λ è continua in $x \neq 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ perché composizione di funzioni continue. Pertanto f_λ è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se $\lambda \in \{\pi/2 + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$. Studiamo ora l'invertibilità di f_λ. Se $x > 0$, $f_\lambda(x) = e^{-1/x}$ è una funzione strettamente crescente perché composizione di due funzioni strettamente crescenti; inoltre la sua immagine è uguale all'immagine della funzione e^u per $u \in (-\infty, 0)$, ossia $(0, 1)$. Considerando $x \in (0, 1]$, si ha che $f_\lambda(x)$ è strettamente crescente e la sua immagine è $(0, 1/e]$. Nel caso in cui $x \in [-1, 0]$, il problema equivale a studiare l'invertibilità di $\cos t$, $t \in [\lambda - 1, \lambda]$. Dobbiamo quindi certamente imporre che $[\lambda - 1, \lambda]$ sia contenuto in un intervallo di invertibilità per $\cos t$. Quindi $[\lambda - 1, \lambda] \subset [k\pi, (k + 1)\pi]$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$. In tale intervallo per t sappiamo inoltre che $\cos t$ è strettamente monotòno. Dobbiamo inoltre imporre che l'immagine di $\cos t$ non contenga punti di $(0, 1/e]$; pertanto essa deve essere contenuta in $[-1, 0] \cup (1/e, 1]$. Dobbiamo quindi imporre che $t \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}}[\pi/2 + 2j\pi, 3\pi/2 + 2j\pi]$ oppure che $t \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}}(-\arccos(1/e) + 2j\pi, \arccos(1/e) + 2j\pi)$. Combinando tali condizioni si ottiene che $[\lambda - 1, \lambda] \subset \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}[2m\pi, \arccos(1/e) + 2m\pi) \cup [\pi/2 + 2m\pi, \pi + 2m\pi]$ oppure $[\lambda - 1, \lambda] \subset \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}(2(m + 1)\pi - \arccos(1/e), 2(m + 1)\pi] \cup [\pi + 2m\pi, 3\pi/2 + 2m\pi]$. Gli intervalli di λ per cui f_λ è invertibile per ogni $x \in [-1, 1]$ si ottengono risolvendo le disequazioni implicite nelle inclusioni precedenti. Per la scrittura della funzione inversa, per comodità, ci restringiamo al caso $m = 0$: se $[\lambda-1, \lambda] \subset [0, \arccos(1/e)) \cup [\pi/2, \pi]$, allora $f_\lambda^{-1}(u) = \arccos(u) - \lambda$ per $u \in [-1, 0] \cup (1/e, 1]$ e $f_\lambda^{-1}(u) = -1/\log(u)$ per $u \in (0, 1/e]$. Inoltre, sempre per $m = 0$, se $[\lambda - 1, \lambda] \subset [\pi, 3\pi/2] \cup (2\pi - \arccos(1/e), 2\pi]$, allora $f_\lambda^{-1}(u) = 2\pi - \arccos(u) - \lambda$ per $u \in [-1, 0] \cup (1/e, 1]$ e $f_\lambda^{-1}(u) = -1/\log(u)$ per $u \in (0, 1/e]$. Per gli altri valori di m va fatto un ragionamento simile, ossia bisogna traslare i valori di $\arccos(u)$ in modo opportuno. ■

E-6.5. Nel primo caso, f non può essere continua in 2 dato che $\lim_{x\to 2} f(x)$ non esiste. Nel secondo caso, f non può essere continua in 2 dato che $\lim_{x\to 2} f(x)$ non è reale. Nel terzo caso, f non può essere continua in 4 perché $\lim_{x\to 4} f(x)$ non esiste essendo il limite destro diverso da quello sinistro. Nel terzo caso, f non può essere continua in 1 perché $\lim_{x\to 1} f(x)$ non esiste essendo il limite destro diverso da quello sinistro. ■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 7

E-7.1. Il primo fatto è vero: non ci si faccia ingannare dal nome della variabile rispetto alla quale si sta facendo il limite; infatti il limite in questione equivale a $\lim\limits_{v\to x_0} \frac{f(v)-f(x_0)}{v-x_0}$ che è il limite del rapporto incrementale per f in x_0. Il secondo fatto è falso per $x_0 \neq 0$: il limite a destra non è il limite del rapporto incrementale per f in x_0 (se $x_0 \neq 0$, il denominatore non tende a 0). Il secondo fatto è vero per $x_0 = 0$: il limite a destra è il limite del rapporto incrementale per f in 0. Il terzo fatto è vero: basta porre $t = -h$ e usare il teorema di sostituzione per i limiti per ottenere che $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0)-f(x_0+t)}{-t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$, ossia il limite del rapporto incrementale per f in x_0. Il quarto fatto è falso: basta porre $h = 2t$ e usare il teorema di sostituzione per i limiti per ottenere che $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+2t)-f(x_0)}{t} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h/2} = 2 \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ che non è il limite del rapporto incrementale per f in x_0, ma il suo doppio. ■

E-7.2. Il primo punto è falso: basta prendere $f(x) = x$ e $x_0 = 0$. Il secondo punto è vero: infatti se $(f)^3$ è derivabile in x_0 allora $(f)^3$ è continua in x_0; si conclude poi osservando che, essendo $f(x) = [(f(x))^3]^{1/3}$ per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, f è composizione di una funzione continua in x_0 con una continua in $y_0 = (f(x_0))^3$; pertanto f è continua in x_0. Il terzo punto è vero. Consideriamo $u \in \mathbb{R}$; il teorema di Lagrange ci assicura che esiste $x \in (u, u+1)$ tale che $f(u+1) - f(u) = f'(x)$. Per $u \to +\infty$, il lato di sinistra ha limite dato da $1 - 1 = 0$; per concludere basta osservare che per $u \to +\infty$ si ha che $x \to +\infty$ (per il teorema sul confronto per i limiti) e pertanto $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{u\to+\infty}(f(u+1) - f(u)) = 0$. Il quarto punto è falso: basta porre $f(x) = \log x$ per $x \geq 1$ e $f(x) = x - 1$ per $x < 1$. Mediante i limiti notevoli non è difficile verificare che f è derivabile in $\mathbb{R}$; inoltre un facile calcolo rivela che $f'(x) = 1/x$ se $x \geq 1$ e 1 se $x < 1$. Si noti che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ e che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. ■

E-7.3. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si osservi che $|f(v) - f(x_0)| \leq K|v - x_0|^\alpha \to 0$ per $v \to x_0$. Pertanto f è continua in $\mathbb{R}$. Per ogni $v \neq x_0$ basta osservare che

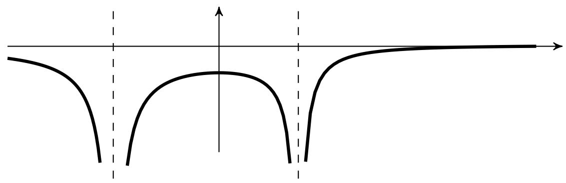
$$0 \leq \left|\frac{f(v) - f(x_0)}{v - x_0}\right| \leq \frac{K|v - x_0|^\alpha}{|v - x_0|} = K|v - x_0|^{\alpha-1} \to 0 \quad \text{per } v \to x_0$$

e applicare il teorema delle tre funzioni per concludere, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, che $\lim_{v\to x_0} \frac{f(v)-f(x_0)}{v-x_0} = 0$. Pertanto f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. ■

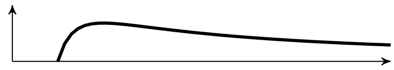
E-7.20. Conviene porre $t = 1/x$, determinare gli intervalli di invertibilità di $\cos t$ per $t \in (0, +\infty)$ e poi ritornare alla variabile x. Infatti se $t \in [k\pi, (k+1)\pi] \cap (0, +\infty)$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$, si ha che $\cos t$ è strettamente monotòna e quindi invertibile. Quindi $t \in (0, \pi]$ oppure $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{N}$, per un certo $k \geq 1$, sono tutti gli intervalli di invertibilità di $\cos t$. Pertanto abbiamo che $x \in [1/\pi, +\infty)$ oppure $x \in [1/((k+1)\pi), 1/(k\pi)]$, $k \in \mathbb{N}$, per un certo $k \geq 1$, sono tutti gli intervalli di invertibilità di $f(x) := \cos(1/x)$, per $x > 0$. Per invertire la funzione ci restringiamo a $x \in [1/\pi, +\infty)$. Osserviamo che

$f(x)$ per $x \in [1/\pi, +\infty)$ è strettamente crescente (lo si verifichi tramite la definizione, oppure osservando che $f(x)$ è la combinazione di due funzioni strettamente decrescenti); pertanto in tale intervallo f è invertibile. L'immagine di $f(x)$ per $x \in [1/\pi, +\infty)$ è $[-1, 1)$; quindi $\sqrt{2}/2 \in \mathcal{I}(f) = \mathcal{D}(f^{-1})$. Inoltre $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $4/\pi \in [1/\pi, +\infty)$ è un punto interno a tale intervallo, $f(x)$ è derivabile in $4/\pi$ e $f'(4/\pi) = (\sin(1/x)/x^2)(4/\pi) = \pi^2/(16\sqrt{2}) \neq 0$. Il teorema di derivazione della funzione inversa ci assicura quindi che f^{-1} è derivabile in $\sqrt{2}/2$ e che $(f^{-1})'(\sqrt{2}/2) = 1/f'(4/\pi) = 16\sqrt{2}/\pi^2$. ■

E-7.34. Se $|\lambda| \geq \pi/2$ il problema non ha soluzioni per le note proprietà dell'immagine della funzione arctan. Se $|\lambda| < \pi/2$, si ponga $\mu = \tan \lambda$ e si risolva il problema $\frac{x-12}{|x^2+x-12|} = \mu$. Determinato il numero di soluzioni in dipendenza di μ, si sfrutterà la stretta monotònia della funzione tan per concludere che ad ogni soluzione in dipendenza di μ corrisponde un'unica soluzione in dipendenza di λ. Si osserva poi che $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}$ e che f è continua dove definita (perché composizione di funzioni continue). Per quanto riguarda la derivabilità, gli unici punti problematici sono dati dai punti di azzeramento di $|x^2 + x - 12|$ che però non appartengono a $\mathcal{D}(f)$; in conclusione, visto che f è sempre esprimibile come rapporto di polinomi non nulli in $\mathcal{D}(f)$, abbiamo che f è derivabile dove è definita. Calcoli immediati rivelano che $f'(x) = -x(x - 24)/(x^2 + x - 12)^2$ per $x < -4$ oppure $x > 3$ e che $f'(x) = x(x-24)/(x^2+x-12)^2$ per $x \in (-4, 3)$. Pertanto se $x < -4$ oppure $x > 3$ si ha che $\lim_{x\to-4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to3^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; inoltre f è strettamente decrescente in $(-\infty, -4) \cup (24, +\infty)$, f è strettamente crescente in $(3, 24)$, il punto $x_0 = 24$ è punto di massimo relativo e $f(24) = 1/49$. Si noti che quindi $(-\infty, 1/49] \subset \mathcal{I}(f)$. Se $x \in (-4, 3)$, allora $\lim_{x\to-4^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$; inoltre f è strettamente decrescente in $(0, 3)$, f è strettamente crescente in $(-4, 0)$, il punto $x_0 = 0$ è punto di massimo relativo e $f(0) = -1$. Si noti che quindi $(-\infty, -1] \subset \mathcal{I}(f)$. Mostriamo la funzione con due grafici per problemi di scala: il primo riguarda $\mathcal{D}(f) \cap (-\infty, 12]$:



Il secondo riguarda $\mathcal{D}(f) \cap (12, 100]$ (con un fattore di scala opportuno per mostrare il punto di massimo in 24):



In ogni intervallo di continuità per f possiamo usare il teorema degli zeri per la funzione $g(x) = f(x)-\mu$. Sia $x \in (-\infty, -4)$: se $\mu \in (-\infty, 0)$ esiste una soluzione a $f(x) = \mu$ con $x \in (-\infty, -4)$; inoltre tale soluzione è unica per la stretta monotònia di f in tale intervallo; per $\mu \geq 0$ non esistono soluzioni per $x \in (-\infty, -4)$. Sia $x \in (-4, 0)$: se $\mu \in (-\infty, -1)$ esiste una soluzione a $f(x) = \mu$ con $x \in (-4, 0)$; inoltre tale soluzione è unica per la stretta monotònia di f in tale intervallo; per $\mu \geq -1$ non esistono soluzioni per $x \in (-4, 0)$. Sia $x \in (0, 3)$: se $\mu \in (-\infty, -1)$ esiste una soluzione a $f(x) = \mu$ con $x \in (0, 3)$; inoltre tale soluzione è unica per la stretta monotònia di f in tale intervallo; per $\mu \geq -1$ non esistono soluzioni per $x \in (0, 3)$. Il caso $\mu = -1$ ha unica soluzione $x = 0$ nell'intervallo $(-4, 3)$. Sia $x \in (3, 24)$: se $\mu \in (-\infty, 1/49)$ esiste una soluzione a $f(x) = \mu$ con $x \in (3, 24)$; inoltre tale soluzione è unica per la stretta monotònia di f in tale intervallo; per $\mu \geq 1/49$ non esistono soluzioni per $x \in (3, 24)$. Sia

$x > 24$: se $\mu \in (0, 1/49)$ esiste una soluzione a $f(x) = \mu$ con $x > 24$; inoltre tale soluzione è unica per la stretta monotònia di f in tale intervallo; per $\mu \geq 1/49$ o $\mu \leq 0$ non esistono soluzioni per $x > 24$. Il caso $\mu = 1/49$ ha unica soluzione $x = 24$ nell'intervallo $(3, +\infty)$. Raccogliendo queste informazioni possiamo concludere che $f(x) = \mu$ ha quattro soluzioni distinte se $\mu < -1$, tre soluzioni distinte se $\mu = -1$, due soluzioni distinte se $\mu \in (-1, 0)$, una soluzione se $\mu \in [0, 1/49]$ e se $\mu > 1/49$ non ci sono soluzioni. Ponendo $\lambda = \arctan \mu$ si risolve l'esercizio nella sua formulazione originale. ■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 8

E-8.1. Per $g(x)$, grazie ai limiti notevoli, è immediato concludere che è un infinitesimo di ordine 2 per $x \to 0^+$. Grazie ai limiti notevoli sappiamo che sia $\sin x$ che $\tan x$ sono infinitesime di ordine 1 per $x \to 0^+$. Pertanto $f(x)$ deve avere ordine di infinitesimo maggiore o uguale a 1 per $x \to 0^+$. Siano $\alpha > 0$ e $x > 0$; consideriamo

$$\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^\alpha} = \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^\alpha} = \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}\frac{\cos x - 1}{x^{\alpha-1}}.$$

I primi due fattori tendono a 1 per $x \to 0^+$ (continuità della funzione coseno e limiti notevoli). Per avere un limite reale, è dunque condizione necessaria e sufficiente che il terzo termine abbia limite reale; notando che il numeratore di questa quantità è $-g(x)$, per quanto precedentemente visto ciò equivale a porre $\alpha - 1 = 2$, ossia $\alpha = 3$. Pertanto $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 3 per $x \to 0^+$. ■

E-8.3. Per definizione si ha che $\lim_{x\to 0^+} f(x)/x^3 = \ell_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e che $\lim_{x\to 0^+} g(x)/x^2 = \ell_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pertanto, grazie al teorema sul limite del prodotto e del rapporto, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^3}\frac{x^2}{g(x)}\frac{x^3}{x^2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \cdot 0 = 0,$$

ossia che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0^+$. ■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 9

E-9.23. Osserviamo che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x)$ è ottenuta mediante somma, prodotto, composizione di funzioni $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$; pertanto, per ogni $a \in \mathbb{R}$, si ha che $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Se $a = 0$ allora $f(x) = (\sin x)(1 - x^2)$ la cui formula di Maclaurin si ottiene immediatamente da quella del seno e fornisce $f(x) = (x - x^3/6 + o(x^3))(1 - x^2) = x - x^3/6 + o(x^3) - x^3 + x^5/6 + o(x^5) = x - 7x^3/6 + o(x^3)$ per $x \to 0$. In tal caso f è un infinitesimo di ordine 1 in 0, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$. Essendo $f'(0) = 1 > 0$ possiamo concludere che esiste un intorno V di 0 in cui f è strettamente crescente e quindi f è invertibile in V. Un facile calcolo fa ottenere che $f''(x) = -(3 - x^2)\sin x - 4x\cos x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; di conseguenza osserviamo che $f''(x) < 0$ per $x \in (0, \pi/2)$ (somma di due quantità negative) e che $f''(x) > 0$ per $x \in (-\pi/2, 0)$ (somma di due quantità positive). Pertanto non esistono intorni U di 0 per cui f è concava (convessa) in U. Supponiamo ora che $a \neq 0$. Ricordando che $\cos u = 1 - u^2/2 + o(u^3)$ per $u \to 0$ e che $e^{ax} - 1 \sim ax$ per $x \to 0$, otteniamo che

$$\cos(e^{ax} - 1) = 1 - \frac{(e^{ax} - 1)^2}{2} + o\left((e^{ax} - 1)^3\right) = 1 - \frac{(e^{ax} - 1)^2}{2} + o\left((ax)^3\right) = 1 - \frac{(e^{ax} - 1)^2}{2} + o\left(x^3\right)$$

per $x \to 0$. Ricordando che $e^u = 1 + u + u^2/2 + o(u^2)$ per $u \to 0$, abbiamo che $(e^u - 1)^2 = (u + u^2/2 + o(u^2))^2 = u^2 + u^4/4 + o(u^4) + u^3 + o(u^3) = u^2 + u^3 + o(u^3)$ per $u \to 0$. Di conseguenza

$$\cos(e^{ax} - 1) = 1 - \frac{(ax)^2}{2} - \frac{(ax)^3}{2} + o\left((ax)^3\right) + o\left(x^3\right) = 1 - \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^3}{2}x^3 + o\left(x^3\right)$$

per $x \to 0$. Quindi, usando quanto visto nel caso $a = 0$, si ha che

$$f(x) = x - \frac{7}{6}x^3 + o\left(x^3\right) + 1 - \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^3}{2}x^3 + o\left(x^3\right) - 1 - ax = (1 - a)x - \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{7 + 3a^3}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$$

per $x \to 0$. Pertanto $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$ se e solo se $a = 1$. Inoltre $f'(0) = 1 - a$ e $f''(0) = -a^2$ e non esistono $a \neq 0$ per cui $f'(0) = f''(0)$. Se $a \neq 1$ (e $a \neq 0$) allora f è strettamente monotòna (e quindi invertibile) in un intorno di 0 perché $f'(0) = 1 - a \neq 0$. Se $a = 1$ allora $f'(0) = 0$ e $f''(0) = -1$; pertanto 0 è un punto di massimo locale e quindi non esiste un intorno di 0 in cui f sia invertibile [infatti, siccome 0 è un punto di massimo locale, esistono $x_1 < 0 < x_2$ tali che $f(x_1) \leq f(0)$ e $f(x_2) \leq f(0)$; per il teorema dei valori intermedi $[f(x_1), f(0)] \subset \mathscr{I}(f)$ e $[f(x_2), f(0)] \subset \mathscr{I}(f)$; posto $v \geq \max(f(x_1); f(x_2))$, $v < f(x_0)$, abbiamo che $[v, f(0)] \subset \mathscr{I}(f)$; infine, il teorema degli zeri applicato a $f(x) - v$ per $x \in (-\infty, 0)$, e poi per ogni $x \in (0, +\infty)$, ci assicura che esistono x_3, x_4, $x_1 \leq x_3 < 0 < x_4 \leq x_2$ tali che $f(x_3) = v = f(x_4)$ e quindi f non è iniettiva in (x_1, x_2)]. Infine, siccome $f''(0) = -a^2 < 0$ per ogni $a \neq 0$, si ha che esiste W, intorno di 0, tale che f è concava in W per ogni $a \neq 0$. ∎

E-9.25. La formula di Maclaurin di $\log(1+x)$ è nota e pertanto si ha che

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\big(x^4\big)\Big) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o\big(x^3\big) \quad \text{per } x \to 0.$$

Adesso serve la formula di Taylor centrata in $u_0 = 1$ di e^u, ossia

$$e^u = e + e(u-1) + e\frac{(u-1)^2}{2} + e\frac{(u-1)^3}{6} + o\big((u-1)^3\big) \quad \text{per } u \to 1,$$

perché, grazie ai limiti notevoli, sappiamo che $\frac{\log(1+x)}{x} \to 1$ per $x \to 0$. Quindi, denotando $f(x) := \frac{\log(1+x)}{x}$, otteniamo che

$$\begin{aligned} e^{f(x)} &= e + e(f(x)-1) + \frac{e}{2}(f(x)-1)^2 + \frac{e}{6}(f(x)-1)^3 + o\big((f(x)-1)^3\big) \\ &= e + e\Big(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o\big(x^3\big)\Big) + \frac{e}{2}\Big(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o\big(x^3\big)\Big)^2 + \frac{e}{6}\Big(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o\big(x^3\big)\Big)^3 \\ &\quad + o\big(x^3\big), \quad \text{per } x \to 0 \end{aligned}$$

perché, da quanto sopra, abbiamo che $f(x) - 1 \sim x$ per $x \to 0$. Di conseguenza, si ottiene che

$$\begin{aligned} e^{\frac{\log(1+x)}{x}} &= e + e\Big(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\Big) + \frac{e}{2}\Big(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\Big) + \frac{e}{6}\Big(-\frac{x^3}{8}\Big) + o\big(x^3\big) \\ &= e - \frac{e}{2}x + \frac{11}{24}ex^2 - \frac{7}{16}ex^3 + o\big(x^3\big) \quad \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

Ciò termina la risoluzione del primo punto. Per il secondo punto, osservando che $1/n \to 0^+$ per $n \to +\infty$, possiamo scrivere che

$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = e^{n\log(1+1/n)} = e - \frac{e}{2n} + \frac{11}{24n^2}e - \frac{7}{16n^3}e + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \quad \text{per } n \to +\infty;$$

pertanto $e - (1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big)$ per $n \to +\infty$. Di conseguenza, grazie al principio di sostituzione degli infinitesimi di ordine superiore, il limite richiesto diviene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e - (1+1/n)^n}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big)}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1}} = \begin{cases} e/2 & \text{se } \alpha = -1 \\ 0 & \text{se } \alpha > -1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < -1. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 10

E-10.1. In questo caso il problema non richiede lo studio di f; basta imporre che $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \neq 0$, ossia $x \neq -2$, e risolvere $\frac{x^2+3}{x^2+4x+4} = \frac{1}{2}$ ossia $2(x^2 + 3) = x^2 + 4x + 4$. ■

E-10.8. Suggeriamo di notare che f è derivabile in $\mathbb{R}$ e che $f'(x) = e^x + 1 > 0$. Pertanto f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e quindi f è invertibile in $\mathbb{R}$. Ricordiamo che $\mathscr{D}(f^{-1}) = \mathscr{I}(f)$. Per il teorema sui limiti delle funzioni monotòne, è sufficiente studiare $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf \mathscr{I}(f)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup \mathscr{I}(f)$ (si ricordi che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$). Grazie al teorema sul limite della somma, non è difficile verificare che $\lim_{x\to-\infty} e^x + x = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} e^x + x = +\infty$. Quindi $\mathbb{R} \subset \mathscr{I}(f)$ da cui segue $\mathscr{I}(f) = \mathbb{R}$. ■

E-10.9. Suggeriamo di notare che $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Inoltre $f(-1) = 3 > 0$, $f(0) = -2 < 0$ e $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x = 2x(2x^2 - 3x + 2) < 0$ per ogni $x < 0$. Per il teorema degli zeri per le funzioni continue e la stretta decrescenza di f in $(-\infty, 0)$, possiamo concludere che in $(-1, 0)$ esiste un unico punto di azzeramento per f. Per calcolare il valore di tale punto x_0 si usi il metodo dicotomico per 6 iterazioni: ogni volta si dimezza la lunghezza dell'intervallo in cui possiamo posizionare x_0. Siccome $2^6 = 64$ e la lunghezza dell'intervallo iniziale è 1, con 6 iterazioni si sa che $x_0 \in I = (c, d)$, $-1 < c < d < 0$ e $d - c = 1/64$. Come approssimazione di x_0 scegliamo ora $x_1 = (c + d)/2$ ossia il punto di mezzo di I. Pertanto $|x_0 - x_1| \leq d - c - (c + d)/2 = (d - c)/2 = 1/128 < 10^{-2}$. Si lascia al lettore diligente il calcolo effettivo dei vari passi del metodo dicotomico e del valore di x_1.
Dopo aver notato la convessità di f nel proprio dominio di definizione, si deduca che il metodo delle corde, delle secanti e di Newton sono applicabili a tale problema. Invitiamo il lettore diligente a costruire le tre ricorrenze di questi metodi e a determinare quante iterazioni di ciascun metodo sono necessarie per determinare x_0 con la precisione richiesta nel testo dell'esercizio. ■

E-10.10. L'esercizio è standard tranne per l'ultimo punto in cui serve la seguente

Proposizione (Derivata seconda della funzione inversa). *Siano $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno, f derivabile in I, $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$ e f derivabile due volte in x_0. Inoltre f sia strettamente monotòna in I. Allora la funzione $f^{-1} \colon \mathscr{I}(f) \to I$ è derivabile due volte in $y_0 = f(x_0)$, $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$ e $(f^{-1})''(y_0) = -f''(x_0)/(f'(x_0))^3$.*

Dimostrazione. Le ipotesi che abbiamo sono più forti del teorema di derivabilità della funzione inversa dimostrato nel testo; questo permette di concludere sull'esistenza della derivata prima dell'inversa e sulla validità della formula indicata per la derivata prima. Per quanto concerne la derivata seconda, osserviamo che dalla relazione $f^{-1}(f(x)) = x$ per ogni $x \in I$ discende, derivando i due lati, che $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ per ogni $x \in I$. Usando il fatto che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$ segue che $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$ per ogni $x \in I$. Ma il teorema di derivabilità del rapporto implica che $1/f'(x)$ sia una funzione derivabile in x_0; pertanto anche $(f^{-1})'$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$. Inoltre, derivando l'ultima formula ottenuta usando il teorema di derivazione della funzione composta e del rapporto, si ha che

$$(f^{-1})''(y_0) \cdot f'(x_0) = -\frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}$$

da cui la tesi segue immediatamente. □

Risultati analoghi si possono dimostrare sulle derivate successive della funzione inversa. ■

E-10.14. Chiaramente $x > 0$ altrimenti $g(x)$ non è definita. Siccome f, g sono entrambe derivabili in $(0, +\infty)$, i coefficienti angolari delle rette tangenti nel punto $x_0 > 0$ sono rispettivamente dati da $f'(x_0) = 2x_0$ e $g'(x_0) = 1/x_0$. Tali coefficienti devono essere tra loro uguali e questo conduce a porre $2x_0 = 1/x_0$ ossia $2x_0^2 = 1$; pertanto $x_0 = \sqrt{2}/2$ perché $x_0 > 0$. Inoltre va imposto che $f(x_0) = g(x_0)$, ossia $x_0^2 - \lambda = \log x_0$. Siccome $x_0 = \sqrt{2}/2$, quest'ultima relazione diviene $1/2 - \lambda = -(\log 2)/2$ da cui segue $\lambda = (1 + \log 2)/2$. Pertanto per tale valore di λ le funzioni f, g sono tangenti nel punto $\sqrt{2}/2$ (e non vi sono altre soluzioni). ■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 11

E-11.5. I primi due esercizi si risolvono usando l'integrazione per parti e poi il metodo dei fratti semplici. Gli ultimi due si risolvono usando il teorema di integrazione per sostituzione e poi il metodo dei fratti semplici. ■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 12

E-12.2. Si osservi che $f(x) \geq 0$ per $x \in [1, \sqrt{e}]$ e $f(x) \leq 0$ per $x \in [1/\sqrt{e}, 1]$. Pertanto l'area da calcolare è data da

$$\int_{1/\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_{1/\sqrt{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{e}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Una primitiva di $f(x)$ per $x > 0$ si determina con il metodo dei fratti semplici ed è $F(x) = \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \log x + \arctan x$, per $x > 0$. L'area cercata vale quindi $-(F(1) - F(1/\sqrt{e})) + F(\sqrt{e}) - F(1) = F(\sqrt{e}) + F(1/\sqrt{e}) - 2F(1)$. Valutando la funzione F nei punti indicati e usando le note proprietà delle funzioni log e arctan si ottiene che il valore dell'area richiesta è $\log(1+e) - 1/2 - \log 2$. ■

E-12.3. Chiaramente $a, b > 0$ per definizione dei semiassi dell'ellisse. Forniamo solamente il seguente suggerimento: l'area da calcolare è il doppio dell'area sottesa dalla semiellisse $y = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$. ■

E-12.5. Notiamo che per $x \geq 1$ si ha che $\log x \geq 0$ e quindi $g(x) \geq 0$ per $x \geq 1$. L'area richiesta è quindi $\int_1^{e^2} g(x)\,\mathrm{d}x$. Per il teorema di sostituzione definita applicata a $x = u(t) = e^t$, si ottiene che

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{t^3+2t+4}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \left(t + \frac{t+4}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\bigg|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + 4\arctan t\bigg|_0^2 \\ &= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\log(t^2+1) + 4\arctan t\right)\bigg|_0^2 = 2 + \frac{1}{2}\log 5 + 4\arctan 2.\end{aligned}$$ ■

E-12.6. Forniamo solo un suggerimento. Mediante il teorema di sostituzione definita nel primo caso il problema diviene il calcolo dell'integrale definito di $\log t$, con $t \in [1, e^2]$, mentre nel secondo caso ci si riconduce a quello di $\frac{t^3+4t+1}{t^2+4}$, con $t \in [0, 1]$. ■

E-12.13. Osserviamo che $e^{(\sin t)^2} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ e quindi il teorema fondamentale del calcolo integrale ci assicura che $F(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e $F'(x) = e^{(\sin x)^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Di conseguenza $G'(x) = e^{(\sin x)^2} - 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi $G'(0) = 0$. Inoltre siccome $(\sin x)^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $G'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; di conseguenza $G(x)$ è debolmente crescente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infine se 0 fosse un punto di minimo per $G(x)$ allora esisterebbe un intorno U_0 di 0 per cui $G(x) \geq G(0)$ per ogni $x \in U_0$; sia allora $x_1 < 0$ e $x_1 \in U_0$; da quanto sopra $G(x_1) \geq G(0)$ in contraddizione con il fatto che G è una funzione debolmente crescente dove definita. Pertanto 0 non è punto di minimo per $G(x)$. ■

E-12.14. Osserviamo che $\arctan(\log t) \in \mathscr{C}^0((0, +\infty))$ e quindi il teorema fondamentale del calcolo integrale ci assicura che $H(u) := \int_1^u \arctan(\log t)\,\mathrm{d}t$ è derivabile in $(0, +\infty)$ e $H'(u) = \arctan(\log u)$

per ogni $u \in (0, +\infty)$. Osserviamo adesso che $G(x) = H(e^{x^2-1})$; pertanto $\mathscr{D}(G) = \mathbb{R}$ e G è la funzione composta di due funzioni derivabili. Il teorema di derivazione delle funzioni composte ci assicura che essa è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e che $G'(x) = H'(e^{x^2-1})(2x)e^{x^2-1} = (2x)e^{x^2-1} \arctan(x^2-1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. È immediato notare che $G'(x) > 0$ se e solo se $x(x^2-1) > 0$; pertanto $G'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $G'(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ e che $G'(x) = 0$ se e solo se $x \in \{-1, 0, 1\}$. Il teorema che connette il segno della funzione derivata prima con la monotònia della funzione stessa permette di concludere che $G(x)$ è strettamente crescente se e solo se $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ e che $G(x)$ è strettamente decrescente se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Pertanto i punti stazionari $-1, 0, 1$ sono rispettivamente di minimo, massimo e minimo locale. Osserviamo ora che $G(-1) = 0$ e ricordiamo che G è strettamente crescente per $x \in (-1, 0)$; pertanto, ricordando che G è continua in $\mathbb{R}$, abbiamo che $G(0) > G(-1) = 0$. Si noti adesso che $G(1) = G(-1) = 0$ e quindi 0 è un minimo locale raggiunto sia in -1 che in 1. Per concludere sul fatto che 0 è un minimo globale, basta ricordare che G è continua in $\mathbb{R}$ e che G è strettamente decrescente per $x \in (-\infty, -1)$; quindi $G(x) > G(-1) = 0$ per ogni $x \in (-\infty, -1)$; che G è strettamente crescente per $x \in (-1, 0)$ e quindi $G(x) > G(-1) = 0$ per ogni $x \in (-1, 0)$; che $G(0) > 0$; che G è strettamente decrescente per $x \in (0, 1)$ e quindi $G(x) > G(1) = 0$ per ogni $x \in (0, 1)$ e che G è strettamente crescente per $x \in (1, +\infty)$ e quindi $G(x) > G(1) = 0$ per ogni $x \in (1, +\infty)$. ■

E-12.18. Sia $G(s) = \int_0^s e^{t^2} \arctan(t^2)\, \mathrm{d}t$. Siccome $f(t) = e^{t^2} \arctan(t^2)$ è continua su $\mathbb{R}$, il teorema fondamentale del calcolo integrale ci assicura che $G(s)$ è derivabile per ogni $s \in \mathbb{R}$ e $G'(s) = f(s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$. Un'altra applicazione del teorema fondamentale del calcolo integrale mostra che $F(x) = \int_0^x G(s)\, \mathrm{d}s$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $F'(x) = G(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Di conseguenza $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ e $F''(x) = G'(x) = f(x) = e^{x^2} \arctan(x^2)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, possiamo concludere che F è convessa per ogni $x \in \mathbb{R}$. ■

E-12.19. Accenniamo il metodo risolutivo. Nel primo caso si noti che $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ e pertanto l'integranda è data da $R(\cos x) \sin x$, dove $R(u) = \frac{2u+1}{u^2-5u+6} = \frac{2u+1}{(u-3)(u-2)}$. Applicando il teorema di integrazione per sostituzione (ponendo $u = g(x) = \cos x$ che è invertibile per ogni $x \in [0, \pi/2]$) ci si riconduce a dover calcolare le primitive di $-R(u)$. Tale calcolo si può eseguire con il metodo dei fratti semplici. Infine, detta $F(u)$ una di tali primitive di $-R(u)$, ne va poi calcolata la variazione tra 1 e 0. Nel secondo caso si richiede di calcolare l'area sottesa dal grafico della funzione $x \cos x$ tra 0 e π. Conviene osservare che $\cos x \geq 0$ per $x \in [0, \pi/2]$ e $\cos x < 0$ per $x \in (\pi/2, \pi]$; otteniamo che

$$\int_0^{\pi} |x \cos x|\, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} x \cos x\, \mathrm{d}x - \int_{\pi/2}^{\pi} x \cos x\, \mathrm{d}x.$$

A questo punto va calcolata una primitiva $F(x)$ di $x \cos x$ usando il teorema di integrazione per parti. Infine, calcolando le variazioni di tale primitiva negli intervalli indicati, si ottiene che $\int_0^{\pi} |x \cos x|\, \mathrm{d}x = F(\pi/2) - F(0) - (F(\pi) - F(\pi/2)) = 2F(\pi/2) - F(0) - F(\pi)$. ■

E-12.24. Posto $F(z) = \int_{\pi}^{z} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t$, si ha che $G(x) = -F(x^2)$. Siccome $\frac{\cos t}{t}$ è una funzione continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, il teorema fondamentale del calcolo integrale ci permette di dire che $F(z)$ è derivabile in $(0, +\infty)$ e che $F'(z) = \frac{\cos z}{z}$ per ogni $z \in (0, +\infty)$. Il teorema di derivazione della funzione composta implica che G è derivabile in $(0, +\infty)$ e che $G'(x) = -2xF'(x^2) = -2\frac{\cos(x^2)}{x}$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Osserviamo ora che $G(\sqrt{\pi}) = \int_{\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t = 0$ e che $G'(\sqrt{\pi}) = -2\frac{\cos \pi}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Inoltre $G''(x) = 4 \sin(x^2) + 2\frac{\cos(x^2)}{x^2}$ per

ogni $x \in (0, +\infty)$ da cui segue $G''(\sqrt{\pi}) = -\frac{2}{\pi}$. Il polinomio cercato è quindi $\frac{2}{\sqrt{\pi}}(x - \sqrt{\pi}) - \frac{1}{\pi}(x - \sqrt{\pi})^2$.
■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 13

E-13.8. Nel primo caso, siccome $f(t) = e^t \log(1+t)$ è continua per $t > -1$, il teorema fondamentale del calcolo integrale ci assicura che $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è una funzione derivabile per ogni $x > -1$ e che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x > -1$. In particolare $F(x)$ è continua in 0 e quindi $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0$. Il primo caso riguarda quindi un rapporto di infinitesimi. Osserviamo che il denominatore è una funzione derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e che la sua derivata prima è non nulla in tutti gli intorni bucati di 0. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x \log(1+x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{2},$$

grazie ai noti limiti notevoli e alla continuità della funzione esponenziale. Di conseguenza possiamo applicare uno dei teoremi di Bernoulli-de l'Hôpital, ottenendo che $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2}$ esiste e che $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{2x} = \frac{1}{2}$. Nel secondo caso viene richiesto il valore dell'integrale improprio in $[0,+\infty)$ di $g(t) = e^{t^2} \log(1+t^2)$. Osservando che $g(t) > 0$ per ogni $t > 0$ e che $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ (grazie al teorema sul limite del prodotto), possiamo concludere che l'integrale improprio in questione è divergente, ossia che il valore limite richiesto vale $+\infty$. Nel terzo caso, posta $h(x) = e^{x^2} + e^x + 1$, si osserva che $h(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e che $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Pertanto, posta $H(y) = \int_0^y h(x)\,\mathrm{d}x$, si ha che $\lim_{y\to+\infty} H(y) = +\infty$. Il terzo caso riguarda quindi un rapporto di infiniti. Notiamo che il teorema fondamentale del calcolo integrale, visto che $h(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, implica che $H(y)$ è derivabile per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $H'(y) = h(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Osserviamo inoltre che il denominatore è una funzione derivabile per ogni $y \in \mathbb{R}$ e che la sua derivata prima data da $2ye^{y^2} + e^y > e^y > 0$ per ogni $y > 0$. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{H'(y)}{2ye^{y^2} + e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y^2} + e^y + 1}{2ye^{y^2} + e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y^2}(1 + e^{y-y^2} + e^{-y^2})}{ye^{y^2}(2 + e^{y-y^2}/y)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1 + e^{y-y^2} + e^{-y^2}}{y(2 + e^{y-y^2}/y)} = 0,$$

dato che $y - y^2 \to -\infty$ per $y \to +\infty$ e usando i noti limiti della funzione esponenziale. Di conseguenza possiamo applicare uno dei teoremi di Bernoulli-de l'Hôpital, ottenendo che $\lim_{y\to+\infty} \frac{H(y)}{e^{y^2}+e^y+1}$ esiste e che $\lim_{y\to+\infty} \frac{H(y)}{e^{y^2}+e^y+1} = \lim_{y\to+\infty} \frac{H'(y)}{2ye^{y^2}+e^y} = 0$. ■

E-13.11. Si noti che la funzione integranda $f_\alpha(x)$ è definita in $(0,+\infty) \setminus \{e^2, e^3\}$ ed è ivi continua. Osserviamo inoltre che $f_\alpha(x)$ ha segno costante in $(e^4, +\infty)$. Sia $\alpha < 0$. Allora $f_\alpha(x)$ è un infinito a $+\infty$ e pertanto l'integrale diverge per $\alpha < 0$. Sia $\alpha \geq 0$. Allora $f_\alpha(x)$ è un infinitesimo a $+\infty$; dobbiamo quindi investigarne l'ordine di infinitesimo a $+\infty$. Se $\alpha \in [0,1)$, poniamo $\varepsilon = (1-\alpha)/2 > 0$, $\beta = \alpha + \varepsilon < 1$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{1/x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+\varepsilon}}{x^\alpha(\log^2 x - 5\log x + 6)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\varepsilon}{\log^2 x - 5\log x + 6} = +\infty.$$

Pertanto, per $\alpha \in [0, 1)$ si ha che $f_\alpha(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $\beta < 1$ a $+\infty$; il criterio dell'ordine di infinitesimo ci permette di concludere che in tali casi l'integrale è divergente. Se $\alpha > 1$, poniamo $\beta = \alpha$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{1/x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\alpha(\log^2 x - 5\log x + 6)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log^2 x - 5\log x + 6} = 0.$$

Pertanto, per $\alpha > 1$ si ha che $f_\alpha(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\beta > 1$ a $+\infty$; il criterio dell'ordine di infinitesimo ci permette di concludere che in tali casi l'integrale è convergente. Se $\alpha = 1$, posto $g(x) = 1/(x\log^2 x)$, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log^2 x}{x(\log^2 x - 5\log x + 6)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - 5/\log x + 6/\log^2 x} = 1.$$

Pertanto, per $\alpha = 1$ si ha che $f_1(x)$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $1/(x\log^2 x)$ a $+\infty$; il criterio asintotico ci permette di concludere che in tal caso l'integrale è convergente.
Indichiamo come effettuare il calcolo dell'integrale improprio nel caso $\alpha = 1$, che sappiamo essere un valore reale grazie alla sua convergenza appena provata. Si osservi che $f_1(x) = R(\log x)/x$, dove $R(u) = 1/(u^2 - 5u + 6)$, e che la sostituzione $x = e^u$ permette di ricondurre il problema al calcolo delle primitive di $R(u)$. Tale calcolo delle primitive può essere effettuato mediante il metodo dei fratti semplici osservando che $u^2 - 5u + 6 = (u-2)(u-3)$. Detta $F(u)$ una primitiva di $R(u)$ per $u \geq 4$, una primitiva di $f_1(x)$ è allora $G(x) = F(\log x)$ per ogni $x \geq e^4$. Il valore dell'integrale improprio richiesto si ottiene quindi calcolando $\lim_{z\to+\infty}(G(z) - G(e^4)) = \lim_{z\to+\infty}(F(\log z) - F(4))$. ■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 14

E-14.2. Nella prima parte utilizziamo il criterio della radice (si noti che $a_n := n^{1/n} - 1 \geq 0$ per ogni $n \geq 1$, come mai?) ottenendo che

$$a_n^{1/n} = [(n^{1/n} - 1)^{2n+1}]^{1/n} = (n^{1/n} - 1)^{2+1/n} = e^{(2+1/n)\log(n^{1/n}-1)}$$

per ogni $n \geq 2$. Siccome $n^{1/n} \to 1^+$ per $n \to +\infty$ abbiamo che $\log(n^{1/n} - 1) \to -\infty$ per $n \to +\infty$; pertanto $(2+1/n)\log(n^{1/n}-1) \to -\infty$ per $n \to +\infty$ grazie ai teoremi sul limite del prodotto. Sfruttando quest'ultima informazione e il calcolo su a_n fatto precedentemente si conclude che $a_n^{1/n} \to 0$ per $n \to +\infty$. Il criterio della radice per le serie permette quindi di concludere che $\sum a_n$ è convergente.
Per la seconda parte, osserviamo che per $n \geq 1$ si ha che $0 < 1/n \leq 1$ e quindi $\cos(1/n) > 0$ e $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Inoltre $\cos(1/n) \to 1$ per $n \to +\infty$ per il teorema di sostituzione dei limiti e la continuità della funzione coseno in 0. Pertanto possiamo scrivere $a_n = e^{n\log(\cos 1/n)} = e^{b_n}$ e, per il teorema di sostituzione dei limiti, abbiamo che $\log(\cos 1/n) \to 0$ per $n \to +\infty$. Ricordando i limiti notevoli abbiamo che

$$b_n = \frac{\log(1 + (\cos(1/n) - 1))}{\cos(1/n) - 1} \frac{\cos(1/n) - 1}{(1/n)^2} \frac{(1/n)^2}{1/n} \to 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 = 0$$

per $n \to +\infty$. Quindi, nuovamente per il teorema di sostituzione dei limiti, abbiamo che $a_n = e^{b_n} \to 1$ per $n \to +\infty$. Pertanto la condizione necessaria di convergenza delle serie numeriche implica che $\sum a_n$ è non convergente. Considerando che $a_n > 0$ possiamo concludere che $\sum a_n$ è divergente. ■

E-14.3. In questi tre casi suggeriamo di studiare la validità della condizione necessaria di convergenza; poi, in caso positivo, si utilizzi il criterio della radice. ■

E-14.13. Scriviamo $a_n = b_n/c_n$ e valutiamo gli ordini di grandezza di b_n e di c_n. Ricordando che $\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1$, abbiamo che $n^2 \tanh(n^2) = n^2 + o(n^2)$ per $n \to +\infty$; pertanto è immediato ottenere che $c_n = n^3 \log n + o(n^2)$ per $n \to +\infty$. Ricordiamo la formula di Maclaurin di $\sqrt{1+x}$, si ha che $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + o(x^2)$ per $x \to 0$ da cui segue che $n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = n^2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n/2 - 1/8 + o(1)$ per $n \to +\infty$. Osservando che $10^{-\log n} \to 0$ per $n \to +\infty$, otteniamo che $b_n = n/2 - 1/8 + 2\log^{10} n + o(1) = n/2 + o(n)$ per $n \to +\infty$. Pertanto, grazie al principio di sostituzione degli infiniti di ordine inferiore, possiamo scrivere che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n/2 + o(n)}{n^3 \log n + o(n^2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n/2}{n^3 \log n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2 \log n} = 0.$$

Per quanto riguarda la convergenza di $\sum a_n$, quanto sopra mostra che a_n è asintotica a $d_n := 1/(2n^2 \log n)$. Ciò implica che a_n è definitivamente positiva e che $\sum a_n$ è convergente, dovendo avere lo stesso carattere di convergenza di $\sum d_n$ (che è convergente siccome d_n ha ordine di infinitesimo superiore a 2 per $n \to +\infty$; si ricordi che la serie armonica generalizzata $\sum n^{-\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$). ■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 15

E-15.2. Basta porre $u = t + 1$ e ricondursi a quanto noto sul comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u^n/n$ per concludere sia sul raggio di convergenza che sul comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza. ■

E-15.7. È immediato notare che $\sum_{n=0}^{+\infty} n2^{1-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n2^{1-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ è la serie associata alla derivata prima della funzione $1/(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $|x| < 1$, calcolata nel punto $x = 1/2$. Per i teoremi noti sappiamo quindi che $1/(1-x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$, $|x| < 1$, da cui segue $\sum_{n=1}^{+\infty} n2^{1-n} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4$. ■

Alcune soluzioni degli esercizi del capitolo 16

E-16.1. Questi esercizi si risolvono usando la formula delle EDO del primo ordine a coefficienti continui (si ricordi che la formula vale solo in intervalli!) con le eccezioni dell'ottavo (in cui si suggerisce di porre $z(x) = y(x)^2/2$ da cui segue che $z'(x) = \ldots$) e l'undicesimo (in cui, posto $x \neq 0$ ci si può ricondurre a una equazione a variabili separabili, mentre per $x = 0\ldots$). ■

E-16.3. Notiamo che l'equazione differenziale del testo ammette le soluzioni costanti $y_1(x) = 2$, $y_2(x) = -2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $y(5) = 2$, dato che $y_1(x)$ verifica tale condizione, non può esiste un'altra soluzione dell'equazione differenziale diversa da $y_1(x)$; l'unica soluzione è quindi $y_1(x)$. Sia $y(5) = -1$ oppure $y(5) = 1$. Notiamo che allora $y(5)^2 - 4 = -3 < 0$ e quindi il secondo termine dell'equazione differenziale è privo di significato. In tali casi quindi il problema non ha soluzione. Per completezza risolviamo anche i casi non richiesti nel testo. Il ragionamento precedente ci dice che nella regione $|y| < 2$ non possono esistere soluzioni dell'equazione differenziale. Sia allora $y(5) = y_0$ con $|y_0| > 2$. In questo caso, perlomeno in un intervallo I contenente 5, una funzione $y(x)$, soluzione dell'equazione differenziale, è diversa da $y_1(x)$ e $y_2(x)$ e verifica $y^2(x) > 4$; quindi per ogni $x \in I$ possiamo dividere ottenendo che $\frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{y^2(x)-4}} = x$, ossia una equazione alle variabili separabili. Possiamo quindi scrivere che

$$\sqrt{y^2(x) - 4} = \int \frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{y^2(x) - 4}}\, \mathrm{d}x = \int x\, \mathrm{d}x = x^2 + c$$

per ogni $x \in I$, $c \in \mathbb{R}$. Ricordando la condizione $y(5) = y_0$, si ha che $(y_0^2 - 4)^{1/2} = 25 + c$ da cui segue $c = (y_0^2 - 4)^{1/2} - 25$. In conclusione, per ogni $x \in I$ si ha che $y^2(x) = 4 + (x^2 - 25 + (y_0^2 - 4)^{1/2})^2$ da cui segue $|y(x)| = [4 + (x^2 - 25 + (y_0^2 - 4)^{1/2})^2]^{1/2}$; è ora anche immediato notare che $I = \mathbb{R}$. ■

E-16.4. Conviene porre $z(x) := y'(x)$. L'equazione differenziale diviene $xz'(x) + z(x) = xe^x$ ossia, posto che $x \neq 0$, $z'(x) = -z(x)/x + e^x$. Siano $I = (0, +\infty)$ e $J = (-\infty, 0)$. Posto $a(x) = -1/x$ e $b(x) = e^x$, abbiamo che $z(x) = e^{-\log|x|} \int e^{\log|x|} e^x\, \mathrm{d}x$ per ogni $x \in I$, e una formula analoga vale per $x \in J$. Per $x \in I$ si ha che $z(x) = \frac{1}{x} \int xe^x\, \mathrm{d}x = \frac{xe^x + e^x + c_1}{x}$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Pertanto per $x \in I$, indicata con $F_I(x)$ una primitiva di e^x/x in I, otteniamo $y(x) = \int (e^x + \frac{e^x}{x} + \frac{c_1}{x})\, \mathrm{d}x = e^x + F_I(x) + c_1 \log x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Per $x \in J$ si ha che $z(x) = -\frac{1}{x} \int (-x)e^x\, \mathrm{d}x = \frac{xe^x + e^x + d_1}{x}$, $d_1 \in \mathbb{R}$. Pertanto per $x \in J$, indicata con $F_J(x)$ una primitiva di e^x/x in J, otteniamo $y(x) = \int (e^x + \frac{e^x}{x} + \frac{d_1}{x})\, \mathrm{d}x = e^x + F_J(x) + d_1 \log(-x) + d_2$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Con le formule precedenti è quindi facile risolvere il problema di Cauchy per $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in termini di $F_I(a)$, se $a > 0$, e di $F_J(a)$, se $a < 0$. Sia $a = 0$. Se esistesse una soluzione del problema di Cauchy definita in tal punto si dovrebbe avere che $ay''(a) + y'(a) = ae^a$ che per $a = 0$, $y'(0) = 2$, diviene $0 + 2 = 0$ che è chiaramente falsa per ogni possibile valore di $y(0)$. Pertanto per $a = 0$ il problema di Cauchy non ha soluzioni. ■

E-16.7. Sia $y(x)$ una soluzione, definita in $\mathbb{R}$, del problema; allora $y(0) = 0$. Si noti quindi che $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è una soluzione del problema e chiaramente essa appartiene a $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Proviamo che essa non è l'unica ad avere tale regolarità. Supponiamo per il momento che $x \neq 0$; allora l'equazione differenziale diventa $y'(x) = y(x)/x^2$. Dobbiamo quindi studiare le soluzioni in $I = (0, +\infty)$ e in $J = (-\infty, 0)$. La formula risolutiva fornisce come soluzioni $y_I(x) = c_I e^{-1/x}$, $c_I \in \mathbb{R}$, se $x \in I$, e $y_J(x) = c_J e^{-1/x}$, $c_J \in \mathbb{R}$, se $x \in J$. Notiamo esplicitamente che non esiste alcuna relazione tra c_I e c_J perché sono relative a intervalli tra loro disgiunti; potremmo quindi definire per casi una soluzione su $\mathbb{R}$ come $z(x) = y_I(x)$ se $x \in I$, $z(x) = y_J(x)$ se $x \in J$, e $z(0) = 0$, posto di verificare che $z(x)$ sia derivabile in $\mathbb{R}$. Vogliamo adesso individuare tra queste $z(x)$ se ne esistono aventi la regolarità richiesta. Notiamo che $\lim_{x\to 0^-} e^{-1/x} = +\infty$. Pertanto l'unica possibilità per ottenere che $z(x) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ è quella di porre $c_J = 0$. Osservando che $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ non impone alcuna condizione su c_I, otteniamo che tutte e sole le soluzioni dell'equazione data che sono $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ sono date da $w(x) = y_I(x)$ se $x \in I$, $w(x) = 0$ se $x \in J \cup \{0\} = (-\infty, 0]$. Una facile verifica permette di osservare che in realtà si ha che $w(x) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Calcolando $\lim_{x\to 0^+} \frac{w(x)-w(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{c_I e^{-1/x}}{x} = \lim_{u\to +\infty} c_I \frac{u}{e^u} = 0$, per ogni $c_I \in \mathbb{R}$, e $\lim_{x\to 0^-} \frac{w(x)-w(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = 0$ si ha che $w(x)$ è derivabile in 0 (e che $w'(0) = 0$). Per $x \in I$ si ha che $w'(x) = c_I \frac{e^{-1/x}}{x^2}$, per ogni $c_I \in \mathbb{R}$, e per $x \in J$ si ha che $w'(x) = 0$. Osservando che $\lim_{x\to 0^+} c_I \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \lim_{u\to +\infty} c_I \frac{u^2}{e^u} = 0$, per ogni $c_I \in \mathbb{R}$, si conclude che $w(x) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. ■

E-16.11. L'equazione omogenea associata ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 8$ le cui radici sono 2 e -4. Tutte e sole le soluzioni dell'omogenea associata sono dunque $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Per la soluzione particolare utilizziamo il metodo di somiglianza ponendo $f(x) = e^{\alpha x}$. Dobbiamo quindi distinguere i casi in cui α è radice di $p(\lambda)$ da quelli in cui non lo è. Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2, -4\}$, allora α non è radice di $p(\lambda)$. Una soluzione particolare è quindi del tipo $\overline{y}(x) = Ae^{\alpha x}$, con $A \in \mathbb{R}$ da determinare. Pertanto $\overline{y}'(x) = A\alpha e^{\alpha x}$ e $\overline{y}''(x) = A\alpha^2 e^{\alpha x}$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene che $A\alpha^2 e^{\alpha x} + 2A\alpha e^{\alpha x} - 8Ae^{\alpha x} = e^{\alpha x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui segue che $A(\alpha^2 + 2\alpha - 8) = 1$. Pertanto $A = 1/(\alpha^2 + 2\alpha - 8) = 1/p(\alpha)$. In questo caso tutte e sole le soluzioni del problema del testo sono date da $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x} + e^{\alpha x}/p(\alpha)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = -4$, allora -4 è radice di $p(\lambda)$ di molteplicità 1. Una soluzione particolare è quindi del tipo $\overline{y}(x) = Bxe^{-4x}$, con $B \in \mathbb{R}$ da determinare. Pertanto $\overline{y}'(x) = B(1 - 4x)e^{-4x}$ e $\overline{y}''(x) = 8B(-1 + 2x)e^{-4x}$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene che $8B(-1 + 2x)e^{-4x} + 2B(1 - 4x)e^{-4x} - 8Bxe^{-4x} = e^{-4x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui segue che $-6B = 1$. Pertanto $B = -1/6$. In questo caso tutte e sole le soluzioni del problema del testo sono date da $c_1 e^{2x} + (c_2 - x/6)e^{-4x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = 2$, allora 2 è radice di $p(\lambda)$ di molteplicità 1. Una soluzione particolare è quindi del tipo $\overline{y}(x) = Cxe^{2x}$, con $C \in \mathbb{R}$ da determinare. Pertanto $\overline{y}'(x) = C(1 + 2x)e^{2x}$ e $\overline{y}''(x) = 4C(1 + x)e^{2x}$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene che $4C(1 + x)e^{2x} + 2C(1 + 2x)e^{2x} - 8Cxe^{2x} = e^{2x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui segue che $6C = 1$. Pertanto $C = 1/6$. In questo caso tutte e sole le soluzioni del problema del testo sono date da $(c_1 + x/6)e^{2x} + c_2 e^{-4x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Per il problema di Cauchy finale va risolto il sistema $c_1 + c_2 = 1$; $1/6 + 2c_1 - 4c_2 = 0$. Si ottiene $c_1 = 23/36$, $c_2 = 13/36$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy finale è $(23/36 + x/6)e^{2x} + 13/36e^{-4x}$, $x \in \mathbb{R}$. ■

E-16.12. L'equazione omogenea associata ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ le cui radici sono -1 e -2. Tutte e sole le soluzioni dell'omogenea associata sono dunque $c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Per la soluzione particolare utilizziamo il metodo di variazione delle costanti arbitrarie: poniamo $\overline{y}(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x}$ e determiniamo $c_1(x), c_2(x)$ in modo che $\overline{y}(x)$ risolva l'equazione differenziale. Si perviene al sistema $c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} = 0$; $-c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} = \log(4 + e^{2x})$.

Le soluzioni del sistema sono $c_1'(x) = e^x \log(4 + e^{2x})$ e $c_2'(x) = -e^{2x} \log(4 + e^{2x})$. A questo punto determiniamo $c_1(x), c_2(x)$ mediante l'integrazione per parti e per sostituzione. Si ha che

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= \int e^x \log(4 + e^{2x})\,\mathrm{d}x = e^x \log(4 + e^{2x}) - 2\int \frac{e^{3x}}{4 + e^{2x}}\,\mathrm{d}x \\
&= e^x \log(4 + e^{2x}) - 2\int \frac{t^2}{4 + t^2}\,\mathrm{d}t\Big|_{x=\log t} = e^x \log(4 + e^{2x}) - 2\Big(t - 2\arctan\frac{t}{2}\Big)\Big|_{x=\log t} + d_1 \\
&= e^x \log(4 + e^{2x}) - 2e^x + 4\arctan\frac{e^x}{2} + d_1,
\end{aligned}$$

per $d_1 \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$\begin{aligned}
c_2(x) &= -\int e^{2x} \log(4 + e^{2x})\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{2x}}{2}\log(4 + e^{2x}) + \int \frac{e^{4x}}{4 + e^{2x}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{e^{2x}}{2}\log(4 + e^{2x}) + \int \frac{t^3}{4 + t^2}\,\mathrm{d}t\Big|_{x=\log t} = -\frac{e^{2x}}{2}\log(4 + e^{2x}) + \Big(\frac{t^2}{2} - 2\log(4 + t^2)\Big)\Big|_{x=\log t} + d_2 \\
&= -\frac{e^{2x}}{2}\log(4 + e^{2x}) + \frac{e^{2x}}{2} - 2\log(4 + e^{2x}) + d_2, = -\Big(\frac{e^{2x}}{2} + 2\Big)\log(4 + e^{2x}) + \frac{e^{2x}}{2} + d_2,
\end{aligned}$$

per $d_2 \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, scelte $d_1 = d_2 = 0$, si ha che

$$\overline{y}(x) = 4e^{-x}\arctan\frac{e^x}{2} - 2e^{-2x}\log(4 + e^{2x}) + \frac{1}{2}\log(4 + e^{2x}) - \frac{3}{2}$$

per $x \in \mathbb{R}$. In conclusione, tutte e sole le soluzioni del problema dato, per $x \in \mathbb{R}$, sono $c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \overline{y}(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

E-16.14. Tutti questi esercizi si risolvono determinando per prima cosa le soluzioni dell'equazione omogenea associata e poi calcolando una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Per questa seconda parte, in tutti i casi tranne il quarto si conclude usando il metodo di somiglianza. Nel quarto caso è invece necessario usare il metodo di variazione delle costanti arbitrarie. ■

E-16.16. Notiamo che l'equazione ammette la soluzione costante $y(x) = -2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Supponiamo quindi che $y(x) \neq -2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; in tal caso possiamo dividere e ottenere $\frac{y'(x)}{2+y(x)} = \frac{1}{1+x^2}$ che è alle variabili separabili. Facili calcoli portano a $\log|2 + y(x)| = \arctan x + c$, $c \in \mathbb{R}$, da cui segue che $|2 + y(x)| = Ce^{\arctan x}$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Ciò determina tutte le soluzione dell'equazione differenziale data. Se $y(1) = 2$ abbiamo allora che $y(x) > -2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, altrimenti si avrebbe una contraddizione con il teorema di esistenza e unicità. Pertanto si ottiene che $4 = Ce^{\pi/4}$; in conclusione $y(x) = 4e^{\arctan x - \pi/4} - 2$ è la soluzione cercata. Se $y(1) = -2$, l'equazione differenziale implica che $0 = y'(1)$ ossia $y(x) = k$; quindi $y(x) = -2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è la soluzione cercata (e non ne esistono altre altrimenti si avrebbe una contraddizione con il teorema di esistenza e unicità). ■