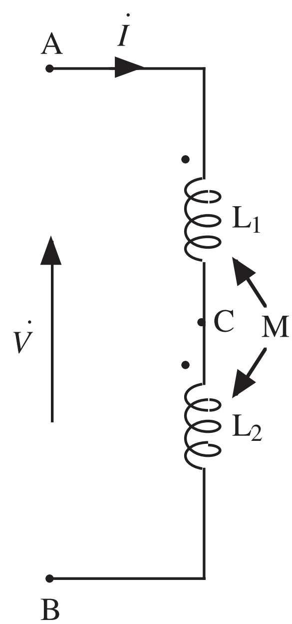
7

Teoria dei quadripoli

Esercitazioni aggiuntive

Esercizio 7.1

Si determini l'induttanza dei due induttori mutuamente accoppiati collegati in serie schematizzati in figura:



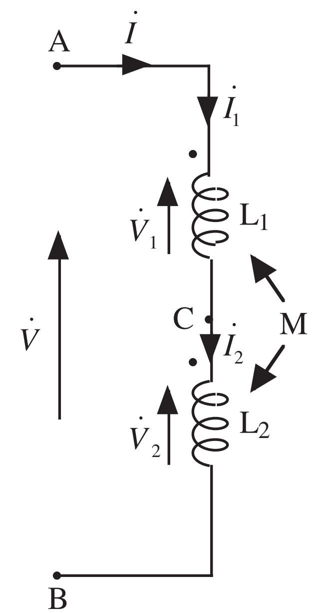
Si supponga che il sistema lineare e tempo-invariante funzioni in regime sinusoidale e si calcoli la sua impedenza per la pulsazione $\omega = 10^3$ [rad/s].

$$L_1 = 1 \text{ [mH]};\ L_2 = 5 \text{ [mH]};\ k = 0.8$$

Poiché è dato il valore del coefficiente di accoppiamento *k* occorre determinare il valore di *M*:

$$|M| = k\sqrt{L_1 L_2} = 1.789 \cdot 10^{-3} \text{ [H]}$$

Per determinare il segno di *M* si faccia riferimento al seguente schema, utilizzando la convenzione dei pallini:



Siccome le correnti $\dot{I}_1$ ed $\dot{I}_2$ entrano entrambe dai morsetti con il pallino il valore di M è positivo: $M = 1.789 \cdot 10^{-3}$ [H].

Il modello per i due induttori accoppiati è:

$$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$
$$\dot{V}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

Poiché i due induttori sono in serie si ha:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$
$$\dot{I} = \dot{I}_1 = \dot{I}_2$$

Quindi per il sistema completo risulta:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = j\omega\left(L_1 + 2M + L_2\right)\dot{I} = j\omega L\dot{I}$$

Il sistema è quindi caratterizzato da un'induttanza L uguale a:

$$L = L_1 + 2M + L_2 = 9.578 \cdot 10^{-3} \text{ [H]}$$

Si osservi come, in questa configurazione, l'effetto della mutua induttanza è quello di rafforzare il comportamento induttivo del sistema.

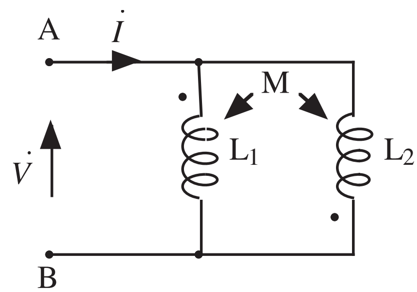
L'impedenza del circuito ad $\omega = 10^3$ [rad/s] è:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = j\omega L = 9.578 e^{j90} \text{ [}\Omega\text{] (fase in gradi)}$$

Esercizio 7.2

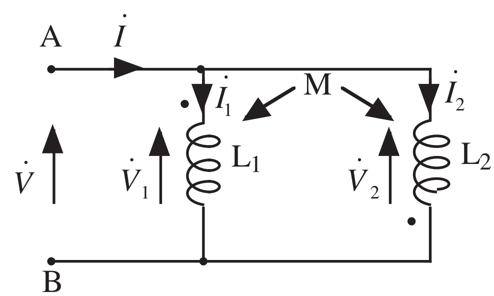
Il circuito rappresentato in figura è lineare, tempo-invariante e in regime sinusoidale.

Si determini l'induttanza equivalente a quella dei due induttori mutuamente accoppiati collegati in parallelo.



$L_1 = 2$ [H]; $L_2 = 10$ [H]; $|M| = 1$[H]

Per determinare l'induttanza ai terminali *A* e *B* occorre considerare l'effetto della mutua induttanza; per determinare il segno di *M* si consideri il seguente schema:



Secondo la convenzione dei pallini, dato che la corrente $\dot{I}_1$ entra dal morsetto contrassegnato con il pallino mentre la $\dot{I}_2$ esce dall'analogo, il segno di *M* è negativo, quindi: $M = -1$ [H].

Il modello per gli induttori accoppiati è:

$$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$
$$\dot{V}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

Poiché gli induttori sono in parallelo si ha:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 = \dot{V}_2$$
$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

Esprimendo le correnti nel mutuo accoppiamento in funzione delle tensioni (v. esercizio 7.5) si ha:

$$\dot{I}_1 = -\frac{L_2 \dot{V}_1 - M \dot{V}_2}{j\omega\left(M^2 - L_1 L_2\right)}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{M \dot{V}_1 - L_1 \dot{V}_2}{j\omega\left(M^2 - L_1 L_2\right)}$$

Quindi la corrente in ingresso all'intero sistema è pari a:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = -\frac{L_2\dot{V}_1 - M\dot{V}_2}{j\omega\left(M^2 - L_1L_2\right)} + \frac{M\dot{V}_1 - L_1\dot{V}_2}{j\omega\left(M^2 - L_1L_2\right)} = \frac{2M - \left(L_1 + L_2\right)}{j\omega\left(M^2 - L_1L_2\right)}\dot{V} = \frac{\dot{V}}{j\omega L}.$$

L'induttanza equivalente L dei due induttori mutuamente accoppiati è:

$$L = \frac{M^2 - L_1L_2}{2M - \left(L_1 + L_2\right)} = 1.357 \ \text{[H]}$$

Si osservi come la mutua induttanza negativa riduca il comportamento induttivo del sistema.

Nell'ipotesi che gli induttori non fossero mutuamente accoppiati ($M = 0$) si avrebbe:

$$L = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)^{-1}$$

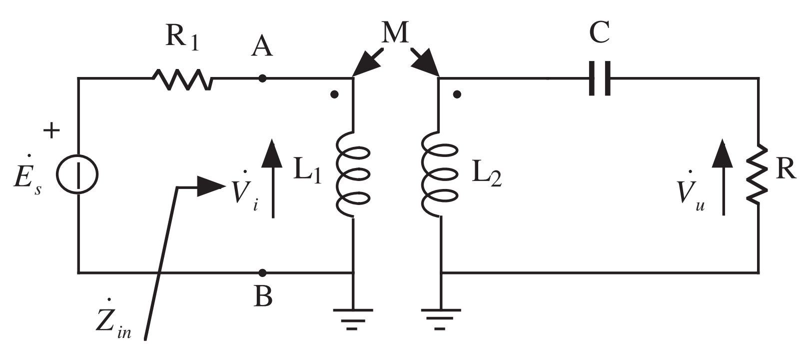
cioè si ritrova la relazione che dà l'induttanza equivalente di due induttori in parallelo.

Esercizio 7.3

Il circuito raffigurato di seguito è lineare, tempo-invariante e funzionante in regime sinusoidale.

Si determinino:

- la funzione di trasferimento $H(j\omega) = \dfrac{\dot{V}_u(j\omega)}{\dot{V}_i(j\omega)}$;
- l'impedenza d'ingresso tra i punti A e B;
- la frequenza di risonanza del circuito.

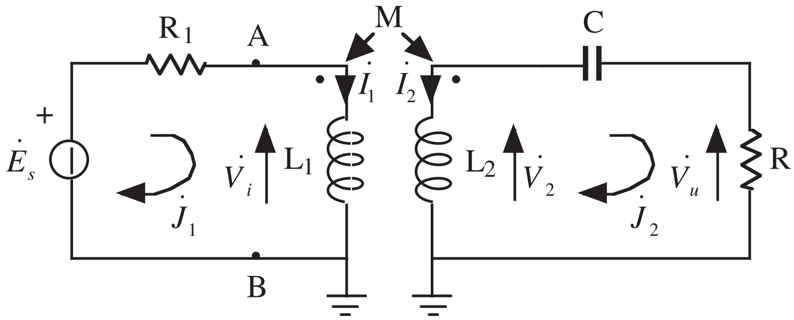


$\dot{E}_s(t) = E_s e^{j\omega t}$ [v]; $R_1 = 10$ [Ω]; $R = 1$ [kΩ]

$L_1 = 100$ [μH]; $L_2 = 200$ [μH]; $M = 50$ [μH]; $C = 20$ [μF]

Il circuito presenta due induttori mutuamente accoppiati che collegano l'ingresso con l'uscita e, in questa sezione, un circuito risonante serie il cui induttore è uno degli induttori mutuamente accoppiati.

Si cominci col determinare la funzione di trasferimento H(jω). A tal fine si definiscano i versi delle tensioni e correnti secondo le direzioni di riferimento associate e si utilizzi il metodo delle correnti di maglia, con i versi definiti come nel seguente schema:



Si adoperi il metodo della scrittura diretta delle equazioni alle maglie:

$$\begin{cases} \left(R_1 + j\omega L_1\right)\dot{J}_1 - j\omega M\dot{J}_2 = \dot{E}_s \\ \left(j\omega L_2 + \dfrac{1}{j\omega C} + R\right)\dot{J}_2 - j\omega M\dot{J}_1 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene:

$$\dot{J}_1 = \frac{\left(\omega^2 L_2 C - 1 - j\omega RC\right)\dot{E}_s}{\omega^2 C\left(L_2 R_1 + L_1 R\right) - R_1 + j\omega\left[\omega^2 C\left(L_1 L_2 - M^2\right) - RR_1 C - L_1\right]}$$

$$\dot{J}_2 = \frac{\omega^2 MC\dot{E}_s}{\omega^2 C\left(L_2 R_1 + L_1 R\right) - R_1 + j\omega\left[\omega^2 C\left(L_1 L_2 - M^2\right) - RR_1 C - L_1\right]}$$

Si osservi come $\dot{J}_2 = 0$ se $M = 0$ oppure se $\omega = 0$; in entrambi i casi se non vi è mutuo accoppiamento non vi può essere corrente sulla maglia con il circuito risonante.

Se $\omega = 0$ è: $\dot{J}_1 = \dfrac{\dot{E}_s}{R_1}$, poiché non vi è mutuo accoppiamento e l'induttanza L_1 diviene un cortocircuito.

Si consideri anche il caso di mutuo accoppiamento con $M^2 = L_1 L_2$ (coefficiente di accoppiamento $k = 1$) in cui il termine di terzo grado in ω a denominatore della $\dot{J}_1$ e della $\dot{J}_2$ si annulla.

Utilizzando la convenzione dei pallini, dato che si sono adoperate le condizioni di riferimento associate e le correnti $\dot{I}_1$ ed $\dot{I}_2$ entrano entrambe dai morsetti con il pallino, M è positivo, quindi: $M = 50$ [μH].

Si valutino ora $\dot{V}_u$ e $\dot{V}_i$:

$$\dot{V}_u = R\dot{J}_2 = \frac{\omega^2 MRC\dot{E}_s}{\omega^2 C\left(L_2 R_1 + L_1 R\right) - R_1 + j\omega\left[\omega^2 C\left(L_1 L_2 - M^2\right) - RR_1 C - L_1\right]}$$

$$\dot{V}_i = j\omega L_1 \dot{J}_1 - j\omega M\dot{J}_2 =$$

$$= \frac{j\omega L_1\left(\omega^2 L_2 C - 1 - j\omega RC\right) - j\omega^3 M^2 C}{\omega^2 C\left(L_2 R_1 + L_1 R\right) - R_1 + j\omega\left[\omega^2 C\left(L_1 L_2 - M^2\right) - RR_1 C - L_1\right]}\dot{E}_s$$

$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_u(j\omega)}{\dot{V}_i(j\omega)} = \frac{\omega MRC}{\omega RCL_1 + j\left[C\left(L_1L_2 - M^2\right)\omega^2 - L_1\right]} =$$

$$= \frac{10^{-6}\omega}{2\cdot 10^{-6}\omega + j\left(3.5\cdot 10^{-13}\omega^2 - 1\cdot 10^{-4}\right)}$$

Confermando quanto detto per $\dot{J}_2$ la $H(j\omega)$ si annulla per $\omega = 0$ e per $M = 0$, e si azzera il termine di secondo grado a denominatore qualora $k = 1$.

Il modulo della $H(j\omega)$ risulta:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega MRC}{\sqrt{\omega^4C^2\left(L_1L_2 - M^2\right)^2 + \omega^2L_1C\left[R^2L_1C - 2\left(L_1L_2 - M^2\right)\right] + L_1^2}} =$$

$$= \frac{10^{-6}\omega}{\sqrt{1.225\cdot 10^{-25}\omega^4 + 4\cdot 10^{-12}\omega^2 + 1\cdot 10^{-8}}}$$

La sua fase:

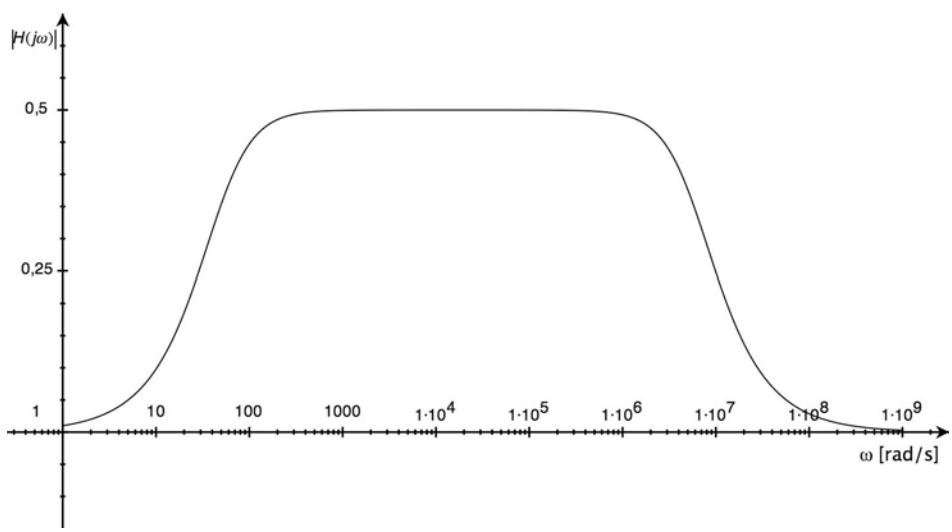
$$\phi_{H(j\omega)} = -arctg\frac{C\left(L_1L_2 - M^2\right)\omega^2 - L_1}{\omega RCL_1} = -arctg\frac{3.5\cdot 10^{-13}\omega^2 - 1\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-6}\omega}$$

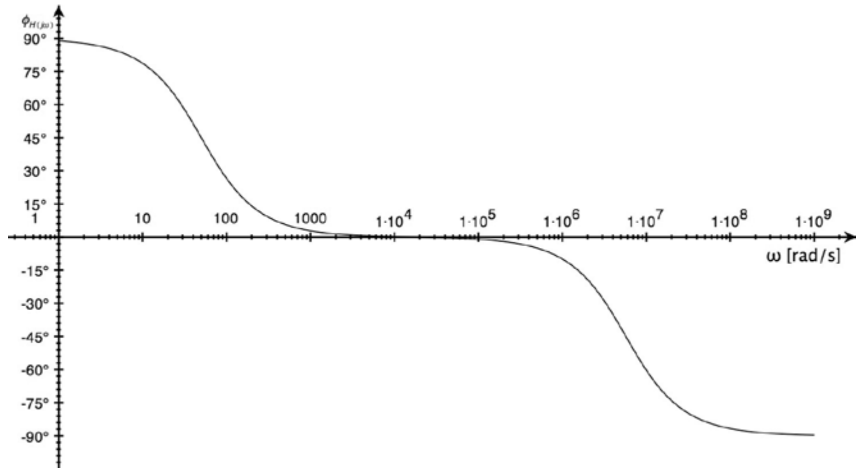
Si rileva che:

Se $\omega = 0$ $|H(j0)| = 0$ e $\phi_{H(j0)} = 90°$;

Se $\omega = \infty$ $|H(j\infty)| = 0$ e $\phi_{H(j\infty)} = -90°$.

I diagrammi del modulo e della fase di $H(j\omega)$ sono:





Si determini se vi è una pulsazione tale che la funzione di trasferimento sia reale; si deve avere:

$$\omega = 0;$$
$$C\left(L_1 L_2 - M^2\right)\omega_1^2 - L_1 = 0$$

La pulsazione ω_1 è: $\omega_1 = 1.690 \cdot 10^4$ [rad/s].

Si è scartato il valore negativo perché non riveste significato fisico.

Per questo stesso valore la fase della $H(j\omega)$ è ovviamente nulla.

La corrispondente frequenza è perciò:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 2.690 \text{ [kHz].}$$
$$\dot{V}_u(j1.690 \cdot 10^4) = 0.139 + j0.822 \text{ [v]}$$

Per calcolare l'impedenza d'ingresso fra i punti A e B si considera:

$$\dot{Z}_{in} = \frac{\dot{V}_i}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{V}_i}{\dot{J}_1} = \frac{\omega^2 L_1 RC + j\omega\left[C\left(L_1 L_2 - M^2\right)\omega^2 - L_1\right]}{\omega^2 L_2 C - 1 - j\omega RC} =$$
$$= \frac{2 \cdot 10^{-6}\omega^2 + j\omega\left(3.5 \cdot 10^{-13}\omega^2 - 1 \cdot 10^{-4}\right)}{4 \cdot 10^{-9}\omega^2 - 1 - j0.02\omega}$$

Razionalizzando:

$$\dot{Z}_{in} = \frac{\omega^4 C^2 R M^2 + j\omega\left[\omega^4 C^2 L_2\left(L_1 L_2 - M^2\right) - \omega^2 C\left(2L_1 L_2 - M^2 - L_1 R^2 C\right) + L_1\right]}{\omega^4 L_2^2 C^2 - \omega^2 C\left(2L_2 - R^2 C\right) + 1}$$

Per determinare la frequenza di risonanza si impone che la parte immaginaria di $\dot{Z}_{in}$ sia uguale a zero:

$$\omega\left[\omega^4 C^2 L_2\left(L_1 L_2 - M^2\right) - \omega^2 C\left(2L_1 L_2 - M^2 - L_1 R^2 C\right) + L_1\right] = 0$$

La soluzione $\omega = 0$ si scarta perché corrisponde a un ingresso non sinusoidale.

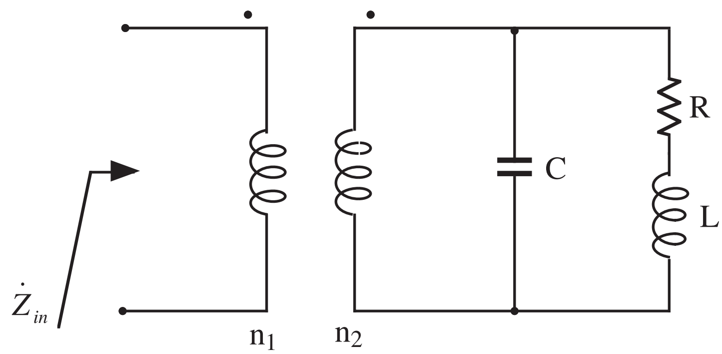
$$\omega^4 C^2 L_2\left(L_1 L_2 - M^2\right) - \omega^2 C\left(2L_1 L_2 - M^2 - L_1 R^2 C\right) + L_1 = 0$$

Non essendoci radici reali e positive la rete non ammette pulsazione di risonanza.

Dal punto di vista fisico si osserva che la variazione del carico R provoca un'alterazione della corrente $\dot{I}_2$ che, attraverso la mutua induttanza M, provoca una variazione del comportamento induttivo del circuito d'ingresso. Si ha cioè un effetto dell'uscita sull'ingresso.

Esercizio 7.4

Si determini il valore dell'impedenza $\dot{Z}_{in}$ vista al primario del trasformatore ideale del circuito lineare, tempo-invariante e in regime sinusoidale riportato nella figura seguente:



$R = 10$ [Ω]; $L = 10$ [mH]; $C = 2$ [mF]
$n_1 = 100$; $n_2 = 10$; $\omega = 1$ [krad/s]

Utilizzando la proprietà di trasformazione delle impedenze del trasformatore ideale, definendo con $\dot{Z}_L$ l'impedenza complessiva al secondario si ha:

$$\dot{Z}_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \dot{Z}_L$$

Occorre preliminarmente, pertanto, calcolare l'impedenza di carico.

Sia:

$$\dot{Z}_s = R + j\omega L = 10 + j10 \ \ [\Omega];\ \dot{Y}_s = \frac{1}{\dot{Z}_s} = 0.05 - j0.05 \ \ [\mathrm{S}]$$

Si ha quindi:

$$\dot{Z}_L = \frac{1}{\dot{Y}_L} = \frac{1}{j\omega C + \dot{Y}_s} = 13.137 \cdot 10^{-3} - j0.512 \cong 0.512 e^{-j88.530} \ \ [\Omega]$$

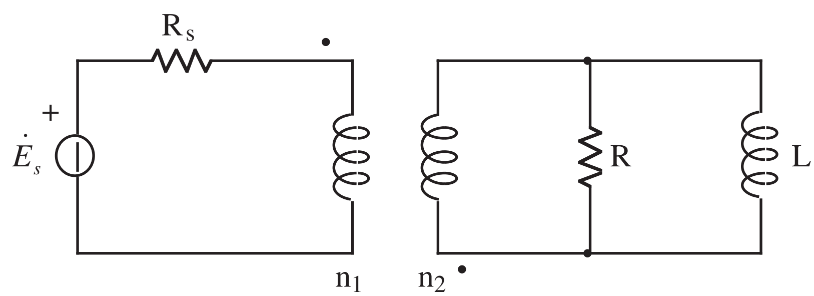
(fasi in gradi).

Da quanto detto risulta pertanto: $\dot{Z}_{in} = 51.2 e^{-j88.530}$ [Ω].

Si osservi come il trasformatore ideale permetta, in questo caso, di ottenere al primario un'impedenza di valore "evidente" partendo da un carico che, alla pulsazione di lavoro $\omega = 1000$ [rad/s] è quasi un cortocircuito ($|\dot{Z}_L| \cong 0.512$ [Ω]), senza alterarne la fase.

Esercizio 7.5

Si consideri il circuito lineare, tempo-invariante e funzionante in regime sinusoidale riportato in figura:



Si determinino la tensione e la corrente fornite dal generatore e l'impedenza al primario del trasformatore ideale sapendo che il carico assorbe una potenza apparente $A = 150$ [VA].

$R = 100$ [Ω]; $R_s = 10$ [Ω]; $L = 50$ [mH]
$n_1 = 500$; $n_2 = 100$; $\omega = 1$ [krad/s]

Dalla definizione di potenza apparente:

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

dove P e Q sono, rispettivamente, le potenze attiva e reattiva impegnate dal carico.

Dato che questo è costituito da una resistenza e da un'induttanza, la potenza attiva deriva solo dalla prima, mentre la reattiva solo dalla seconda.

Allora si ha:

$$\dot{Y}_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\ ;\ \dot{Z}_L = \frac{1}{\dot{Y}_L} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} = \frac{\omega^2 RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{j\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 44.721 e^{j63.435}\ [\Omega]$$

(fasi in gradi).

Lo sfasamento φ_z tra tensione e corrente sul carico è: $\varphi_z = 63.435°$.

Dal triangolo delle potenze:

$$Q = P tg\varphi_z$$

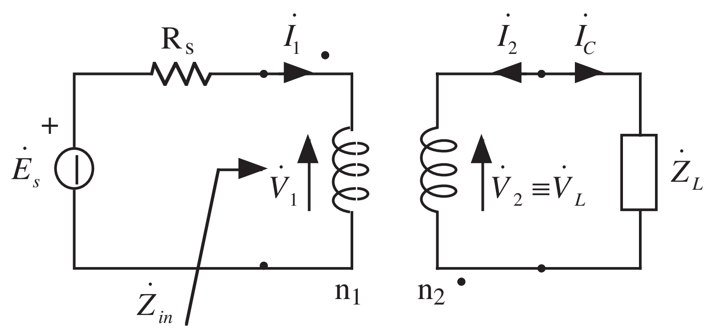
$$\frac{Q}{P} = tg\varphi_z = 2$$

Siccome $P^2 + Q^2 = A^2$ si ottiene:

$$P^2\left(1+\frac{Q^2}{P^2}\right)=A^2$$

$$P = 67.082 \ \text{[W]};\ Q=\sqrt{A^2-P^2}=134.164 \ \text{[VAR]}$$

Ci si riferisca al seguente schema:



Dato che:

$$P=\left|\dot{I}_{L_{eff}}\right|^2 \operatorname{Re}\left[\dot{Z}_L\right]$$

si ottiene:

$$\left|\dot{I}_{L_{eff}}\right|=\sqrt{\frac{P}{\operatorname{Re}\left[\dot{Z}_L\right]}}=1.831 \ \text{[A]}$$

Assumendo che la corrente sul carico abbia fase 0° si ottiene che $\dot{I}_{L_{eff}}=1.831$ [A].

$$\dot{I}_L=\sqrt{2}\dot{I}_{L_{eff}}=2.589 \ \text{[A]};\ \dot{V}_L=\dot{I}_L\dot{Z}_L=115.783e^{j63.435} \ \text{[v]}$$

Con riferimento alle convenzioni scelte per il trasformatore si ha:

$$\dot{I}_2=-\dot{I}_L=-2.589 \ \text{[A]};\ \dot{V}_2=\dot{V}_L=115.783e^{j63.435} \ \text{[v]}$$

Per la convenzione dei pallini si ha:

$$\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}=-\frac{n_1}{n_2}$$

$$\dot{V}_1=-\frac{n_1}{n_2}\dot{V}_2=578.915e^{j243.435} \ \text{[v]}$$

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}=\frac{n_2}{n_1}$$

$$\dot{I}_1=\frac{n_2}{n_1}\dot{I}_2=-0.518 \ \text{[A]}$$

Questo valore rappresenta la corrente erogata dal generatore, che è in verso opposto a quella ipotizzata nello schema.

Si calcoli ora la tensione $\dot{E}_s$:

$$\dot{E}_s = R_s\dot{I}_1 + \dot{V}_1 = 581.250e^{j242.978} \ \text{[v]}$$

Determinazione dell'impedenza vista al primario del trasformatore.

$$\dot{Z}_{in} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = -\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{\dot{V}_L}{\dot{I}_L} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \dot{Z}_L = 1118.025e^{j63.435} \ [\Omega]$$

Si osserva come la trasformazione dell'impedenza riduca le perdite sulla resistenza interna del generatore, dato che a essa si pone in serie il carico visto al primario che è maggiore di quello reale.