W.4.3 Complementi sull'analisi della stabilità dei sistemi lineari

Nel caso in cui il sistema (4.3.1) sia a tempo discreto il seguente lemma risulta utile nell'analisi della sua stabilità.

Lemma W.4.3.1. *Esiste un numero reale positivo c tale che per una qualunque coppia di prefissati numeri reali $\theta \in (0,\ \pi)$ e $\phi \in (-\pi,\ \pi]$ vale la proprietà che per ogni intero positivo k esista un intero $\bar{k} \geq k$ tale da soddisfare la relazione:*

$$\left|\cos(\bar{k}\theta + \phi)\right| \geq c. \tag{W.4.3.1}$$

Dimostrazione. Si definisca $c \triangleq \cos(0.4\pi)$. Per dimostrare la veridicità dell'enunziato per tale valore di c, basterà mostrare che, per i prefissati valori di θ e ϕ, per ogni intero positivo k esistono un intero $\bar{k} \geq k$ e un intero h tali che $(\bar{k}\theta + \phi) \in [h\pi - 0.4\pi,\ h\pi + 0.4\pi]$, ovvero, equivalentemente, tali che $\frac{\bar{k}\theta+\phi}{\pi} \in [h- 0.4,\ h + 0.4]$, ovvero ancora tali che

$$\frac{\bar{k}\theta + \phi}{\pi} = h + \gamma, \tag{W.4.3.2}$$

con $|\gamma| \leq 0.4$.

Pertanto per il valore considerato di k tale proprietà potrebbe essere già soddisfatta per $\bar{k} = k$. Se però questo non avviene, ne consegue che l'eguaglianza

$$\frac{k\theta}{\pi} + \frac{\phi}{\pi} = h + 0.5 + \delta \tag{W.4.3.3}$$

risulterà soddisfatta per un certo intero h e per un valore reale di δ tale che $|\delta| < 0.1$. Si consideri pertanto in tal caso il valore di $\bar{k} = k + 1$; se per esso valesse la relazione, simile alla (W.4.3.2),

$$\frac{(k+1)\theta + \phi}{\pi} = \tilde{h} + \tilde{\gamma}, \tag{W.4.3.4}$$

con $\tilde{h}$ intero e $|\tilde{\gamma}| \leq 0.4$, $k + 1$ sarebbe il valore desiderato di $\bar{k}$; altrimenti per esso dovrà valere la relazione seguente, simile alla (W.4.3.3):

$$\frac{(k+1)\theta}{\pi} + \frac{\phi}{\pi} = \tilde{h} + 0.5 + \tilde{\delta}, \tag{W.4.3.5}$$

per un certo $\tilde{h}$ intero e un certo $\tilde{\delta}$ tale che $\left|\tilde{\delta}\right| < 0.1$. Dal confronto delle (W.4.3.3) e (W.4.3.5) si ottiene:

$$\frac{\theta}{\pi} = \tilde{h} - h + \tilde{\delta} - \delta, \tag{W.4.3.6}$$

con $0.2 > \left|\tilde{\delta} - \delta\right| > 0$ (l'ultima diseguaglianza motivata dall'ipotesi $0 < \theta < \pi$). Pertanto per $\tilde{\delta} - \delta > 0$ sarà effettivamente possibile individuare un intero positivo $\hat{k}$ tale che $0.6 \leq 0.5 + \delta + \hat{k}(\tilde{\delta} - \delta) \leq 1.4$, garantendo perciò in tal modo che nell'ultimo membro della seguente relazione

$$\frac{(k+\hat{k})\theta + \phi}{\pi} = \frac{k\theta}{\pi} + \frac{\phi}{\pi} + \hat{k}\frac{\theta}{\pi} = h + 0.5 + \delta + \hat{k}(\tilde{h} - h) + \hat{k}(\tilde{\delta} - \delta) = \hat{h} + \beta, \tag{W.4.3.7}$$

con $\hat{h} \triangleq h + \hat{k}(\tilde{h} - h)$ intero, il numero reale $\beta \triangleq 0.5 + \delta + \hat{k}(\tilde{\delta} - \delta)$ appartenga all'intervallo $[0.6,\ 1.4]$, sì che essa possa essere riscritta come segue:

$$\frac{(k+\hat{k})\theta + \phi}{\pi} = \hat{h} + 1 + \varepsilon, \tag{W.4.3.8}$$

con $|\varepsilon| \leq 0.4$, rendendo così soddisfatta la (W.4.3.2) per $\bar{k} = k + \hat{k}$, $h = \hat{h} + 1$ e $\gamma = \varepsilon$. Similmente, per $\tilde{\delta} - \delta < 0$ sarà effettivamente possibile individuare un intero positivo $\hat{k}$ tale che $-0.4 \leq 0.5 + \delta + \hat{k}(\tilde{\delta} - \delta) \leq 0.4$, garantendo perciò in tal modo che nell'ultimo membro della (W.4.3.7), con il significato già precisato di $\hat{h}$ e di β, quest'ultimo parametro appartenga all'intervallo $[-0.4,\ 0.4]$, sì che la (W.4.3.7) dimostri che la (W.4.3.2) è soddisfatta, in questo caso per $\bar{k} = k + \hat{k}$, $h = \hat{h}$ e $\gamma = \beta$. $\square$

Grazie a tale lemma le dimostrazioni dei Teoremi 4.3.4 e 4.3.5 per il caso $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ possono essere condotte in modo del tutto simile al caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, a patto di utilizzare il lemma stesso nella dimostrazione per assurdo che, se vale la condizione i) di ciascuno dei due teoremi, allora deve valere necessariamente anche la condizione ii) dello stesso teorema, per il caso in cui l'autovalore λ_i di A che viola la condizione ii) non sia reale.

W.4.4 Ulteriori complementi sui criteri di Routh-Hurwitz e di Jury

W.4.4.1 Dimostrazione del criterio di Routh esteso al caso di tabella di Routh non regolare

Si ricordi che un polinomio $p(s)$ si dice ***polinomio pari*** se contiene solo potenze pari di s, e ***polinomio dispari*** se contiene solo potenze dispari di s, e che con $\deg(p(s))$ si indica il grado del polinomio $p(s)$. In questo paragrafo si utilizzerà ripetutamente il lemma seguente.

Lemma W.4.4.1. *Siano $q(s)$ e $\tilde{q}(s)$ due polinomi a coefficienti reali, uno dei quali dispari e l'altro pari; sia inoltre $\alpha(s)$ un polinomio pari a coefficienti reali tale che $\deg(q(s)) > \deg(\alpha(s) \cdot \tilde{q}(s))$, e inoltre $\alpha(j\omega) > 0$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$. Allora, definendo $\tilde{p}(s) \triangleq q(s) + \tilde{q}(s)$ e $\hat{p}(s) \triangleq q(s) + \alpha(s)\tilde{q}(s)$, valgono le relazioni $N_{-}(\hat{p}) = N_{-}(\tilde{p})$, $N_0(\hat{p}) = N_0(\tilde{p})$, $N_{+}(\hat{p}) = N_{+}(\tilde{p})$.*

Dimostrazione. Si consideri il polinomio

$$m_\eta(s) \triangleq q(s) + ((1-\eta) + \eta\alpha(s))\,\tilde{q}(s),$$

in modo che $m_0(s) = \tilde{p}(s)$ e $m_1(s) = \hat{p}(s)$. Grazie all'ipotesi che $\deg(q(s)) > \deg(\alpha(s) \cdot \tilde{q}(s))$, il polinomio $m_\eta(s)$ ha $k \triangleq \deg(q(s))$ radici per ogni valore di $\eta \in [0,1]$, se ogni radice distinta è contata secondo la propria molteplicità; tali radici sono funzioni continue di η (poiché le radici di un polinomio sono funzioni continue dei suoi coefficienti [1]), e quindi descrivono delle curve continue nel piano complesso che partono dalle k radici di $\tilde{p}(s)$ per $\eta = 0$ e arrivano sulle k radici di $\hat{p}(s)$ per $\eta = 1$. Pertanto, per provare la tesi basta dimostrare che le eventuali radici sull'asse immaginario di $m_\eta(s)$ sono indipendenti da η quando η varia da 0 a 1, e che quindi al variare di η da 0 a 1 nessuna radice di $m_\eta(s)$ può passare dal semipiano sinistro al destro o viceversa.

Scomponendo $m_\eta(s)$ nelle sue parti pari e dispari, si ha

$$m_\eta(s) = \underbrace{q(s)}_{m_a(s)} + \underbrace{((1-\eta) + \eta\alpha(s))\,\tilde{q}(s)}_{m_b(s)}, \tag{W.4.4.1}$$

con $m_a(s)$ pari e $m_b(s)$ dispari se k è pari, e viceversa se k è dispari. Osservando che, per le ipotesi fatte su $\alpha(s)$, per $\eta \in [0,1]$ si ha $((1-\eta) + \eta\alpha(j\omega)) > 0$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, un ragionamento simile a quello usato nella prova del Lemma 4.4.2 per il polinomio $q_\eta(s)$ permette di dimostrare che le eventuali radici immaginarie di $m_\eta(s)$ non variano (in posizione e molteplicità) al variare di η da 0 a 1: in particolare, basta mostrare che se esistono due numeri reali $\tilde{\eta} \in [0,1]$ e $\tilde{\omega}$, tali che $m_{\tilde{\eta}}(s)$ ha una radice in $s = j\tilde{\omega}$ di molteplicità ν, allora $s = j\tilde{\omega}$ è una radice di $m_\eta(s)$ di molteplicità ν per ogni valore di η appartenente all'intervallo $[0,1]$. Si considerino separatamente i due casi $\tilde{\omega} = 0$ e $\tilde{\omega} \neq 0$.

[*Caso* $\tilde{\omega} = 0$] Tenendo conto che $m_a(s)$ e $m_b(s)$ sono l'uno la parte pari e l'altro la parte dispari di $m_\eta(s)$, è chiaro che se $m_{\tilde{\eta}}(s)$ ha una radice nulla $s = 0$ con molteplicità ν, ovvero se $m_{\tilde{\eta}}(s) = s^\nu \cdot \bar{m}_{\tilde{\eta}}(s)$ con $\bar{m}_{\tilde{\eta}}(0) \neq 0$, allora per $\eta = \tilde{\eta}$ deve valere uno dei due casi seguenti (mutuamente esclusivi):

a) $m_a(s) = s^\nu \cdot \bar{m}_a(s)$ con $\bar{m}_a(0) \neq 0$, e $m_b(s) = s^{\nu+1} \cdot \bar{m}_b(s)$;
b) $m_b(s) = s^\nu \cdot \bar{m}_b(s)$ con $\bar{m}_b(0) \neq 0$, e $m_a(s) = s^{\nu+1} \cdot \bar{m}_a(s)$.

Dalla definizione di $m_a(s)$ e di $m_b(s)$ si ha nel caso a)

$$q(s) = m_a(s) = s^\nu \cdot \bar{m}_a(s),$$
$$\tilde{q}(s) = s^{\nu+1} \cdot \frac{\bar{m}_b(s)}{(1-\tilde{\eta}) + \tilde{\eta}\alpha(s)},$$

con $\bar{m}_a(0) \neq 0$, mentre nel caso b)

$$q(s) = m_a(s) = s^{\nu+1} \cdot \bar{m}_a(s),$$
$$\tilde{q}(s) = s^{\nu} \cdot \frac{\bar{m}_b(s)}{(1-\tilde{\eta}) + \tilde{\eta}\alpha(s)},$$

con $\bar{m}_b(0) \neq 0$. Pertanto, tenendo conto che $\alpha(0) > 0$ per ipotesi, e perciò $((1-\eta) + \eta\alpha(0)) > 0$ per ogni $\eta \in [0,1]$ e in particolare per $\eta = \tilde{\eta}$, è facile dedurre dalla definizione (W.4.4.1) di $m_\eta(s)$ e $m_b(s)$ che in entrambi i casi, per ogni valore di $\eta \in [0,1]$, $m_\eta(s)$ contiene il fattore s^ν e che la sua radice nulla $s = 0$ non ha molteplicità $\nu + 1$ ma solo molteplicità ν.
[*Caso* $\tilde{\omega} \neq 0$] Essendo $m_\eta(s)$ un polinomio a coefficienti reali, valutandolo in $s = \jmath\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, la parte pari e la parte dispari di $m_\eta(s)$ daranno luogo, rispettivamente, alla parte reale e alla parte immaginaria di $m_\eta(\jmath\omega)$. Inoltre se $m_{\tilde{\eta}}(s)$ ha una radice immaginaria $s = \jmath\tilde{\omega}$, allora in $\jmath\tilde{\omega}$ devono annullarsi sia la sua parte reale che la sua parte immaginaria; ma allora $\jmath\tilde{\omega}$ deve essere una radice anche di $m_a(s)$ e $m_b(s)$ per $\eta = \tilde{\eta}$. Se poi tale radice $s = \jmath\tilde{\omega}$ di $m_{\tilde{\eta}}(s)$ ha molteplicità $\nu \geq 2$, ciò implica che per $s = \jmath\tilde{\omega}$ si annullano anche tutte le derivate di $m_{\tilde{\eta}}(s)$ di ordine $1, \ldots, \nu - 1$, le quali hanno come parte pari e parte dispari le derivate dello stesso ordine di $m_a(s)$ e $m_b(s)$ per $\eta = \tilde{\eta}$; perciò anche le derivate di ordine $1, \ldots, \nu - 1$ di $m_a(s)$ e $m_b(s)$ per $\eta = \tilde{\eta}$ devono annullarsi per $s = \jmath\tilde{\omega}$; ma allora $s = \jmath\tilde{\omega}$ deve essere una radice di molteplicità almeno pari a ν anche per tali $m_a(s)$ e $m_b(s)$ per $\eta = \tilde{\eta}$. Poiché $q(s) = m_a(s)$ (indipendentemente da η), $\jmath\tilde{\omega}$ deve essere una radice di molteplicità almeno pari a ν anche di $q(s)$. Per vedere che $\jmath\tilde{\omega}$ è una radice di molteplicità almeno pari a ν anche di $\tilde{q}(s)$, si noti che definendo $\tilde{\alpha}_\eta(s) \triangleq (1-\eta) + \eta\alpha(s)$ si ha

$$\begin{bmatrix} m_b(s) \\ \frac{d}{ds} m_b(s) \\ \vdots \\ \frac{d^{\nu-2}}{ds^{\nu-2}} m_b(s) \\ \frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} m_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_\eta(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & \tilde{\alpha}_\eta(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & \tilde{\alpha}_\eta(s) & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & \tilde{\alpha}_\eta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}(s) \\ \frac{d}{ds} \tilde{q}(s) \\ \vdots \\ \frac{d^{\nu-2}}{ds^{\nu-2}} \tilde{q}(s) \\ \frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} \tilde{q}(s) \end{bmatrix},$$

dove $*$ indica elementi ininfluenti ai fini del risultato che qui interessa. Valutando la relazione precedente per $s = \jmath\tilde{\omega}$, si ha che il vettore a primo membro è nullo per $\eta = \tilde{\eta}$ in quanto $\jmath\tilde{\omega}$ per $\eta = \tilde{\eta}$ annulla $m_b(s)$ e le sue prime $\nu - 1$ derivate; inoltre per $s = \jmath\tilde{\omega}$ la matrice a secondo membro è invertibile per ogni $\eta \in [0, 1]$ in quanto triangolare inferiore con elementi sulla diagonale principale positivi (infatti, essendo per ipotesi $\alpha(\jmath\omega) > 0$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, anche $\tilde{\alpha}_\eta(\jmath\tilde{\omega}) = (1-\eta) + \eta\alpha(\jmath\tilde{\omega}) > 0$ per ogni $\eta \in [0, 1]$); se ne deduce che per $s = \jmath\tilde{\omega}$ anche il vettore a secondo membro è nullo, e quindi che $s = \jmath\tilde{\omega}$ è una radice di molteplicità almeno pari a ν di $\tilde{q}(s)$ (in quanto per $s = \jmath\tilde{\omega}$ sono nulli $\tilde{q}(s)$ e le sue prime $\nu - 1$ derivate). Poiché in tal modo si è dimostrato che $s = \jmath\tilde{\omega}$ è una radice di molteplicità almeno pari a ν di $q(s)$ e di $\tilde{q}(s)$, si deduce che $s = \jmath\tilde{\omega}$ è una radice di molteplicità almeno pari a ν di $m_\eta(s)$ per ogni $\eta \in [0, 1]$. Se inoltre per ipotesi $s = \jmath\tilde{\omega}$ è una radice di molteplicità ν (e non maggiore) di $m_{\tilde{\eta}}(s)$, allora, definendo come segue $\bar{q}(s)$ e $\bar{\tilde{q}}(s)$,

$$q(s) \triangleq (s - \jmath\tilde{\omega})^\nu \cdot \bar{q}(s), \qquad \tilde{q}(s) \triangleq (s - \jmath\tilde{\omega})^\nu \cdot \bar{\tilde{q}}(s),$$

deve valere almeno una delle due relazioni seguenti:

a) $\bar{q}(\jmath\tilde{\omega}) \neq 0$;
b) $\bar{\tilde{q}}(\jmath\tilde{\omega}) \neq 0$

(altrimenti $s = \jmath\tilde{\omega}$ sarebbe una radice di $m_{\tilde{\eta}}(s)$ di molteplicità maggiore di ν). Poiché, come già rilevato, il polinomio $\tilde{\alpha}_\eta(s)$ è diverso da zero per $s = \jmath\tilde{\omega}$ per ogni $\eta \in [0, 1]$, ove una tra le due quantità $\bar{q}(\jmath\tilde{\omega})$ e $\bar{\tilde{q}}(\jmath\tilde{\omega})$ sia nulla resta dimostrato che per ogni $\eta \in [0, 1]$ la radice $s = \jmath\tilde{\omega}$ di $m_\eta(s)$ ha molteplicità pari a ν e non maggiore. Si noti inoltre che, ove valgano sia la a) sia la b), poiché anche $-\jmath\tilde{\omega}$ è radice di $q(s)$ e di $\tilde{q}(s)$ di molteplicità almeno pari a ν, il polinomio $m_\eta(s)$ per $\eta \in [0, 1]$ è espresso da

$$m_\eta(s) = (s - \jmath\tilde{\omega})^\nu (s + \jmath\tilde{\omega})^\nu \left(\hat{\bar{q}}(s) + ((1-\eta) + \eta\alpha(s))\,\hat{\bar{\tilde{q}}}(s)\right), \qquad \text{(W.4.4.2)}$$

ove

$$\hat{\bar{q}}(s) \triangleq \frac{\bar{q}(s)}{(s + \jmath\tilde{\omega})^\nu}, \qquad \hat{\bar{\tilde{q}}}(s) \triangleq \frac{\bar{\tilde{q}}(s)}{(s + \jmath\tilde{\omega})^\nu}, \qquad \text{(W.4.4.3)}$$

e ove tra i due addendi $\hat{\bar{q}}(s)$ e $((1-\eta) + \eta\alpha(s))\,\hat{\bar{\tilde{q}}}(s)$ uno è pari e l'altro è dispari, e perciò, per quanto già rilevato sul fattore pari $\alpha_\eta(s)$ valutato per $s = \jmath\tilde{\omega}$ e per le ipotesi a) e b), uno di essi è reale e non nullo e l'altro è immaginario e non nullo se calcolati per $s = \jmath\omega$, e pertanto $m_\eta(s)$ ha in $s = \jmath\tilde{\omega}$ una radice di molteplicità ν e non maggiore di ν per ogni $\eta \in [0, 1]$ anche nel caso ora considerato in cui valga sia la a) sia la b). $\square$

Corollario W.4.4.1. *Se n è maggiore o uguale a 1, definendo $r^{(k)}(s)$ con la* (4.4.9a) *per ogni intero $k = 0, 1, \ldots, n$, e $p^{(k+1)}(s)$ con la* (4.4.9b)*, cioè con la relazione seguente*

$$p^{(k+1)}(s) \triangleq r^{(k+1)}(s) + r^{(k)}(s), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{W.4.4.4}$$

se $\alpha(s)$ è un polinomio pari a coefficienti reali tale che

$$\deg(r^{(k+1)}(s)) > \deg(\alpha(s) \cdot r^{(k)}(s))$$

e inoltre $\alpha(j\omega) > 0$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, allora, definendo

$$\hat{p}^{(k+1)}(s) \triangleq r^{(k+1)}(s) + \alpha(s) r^{(k)}(s), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

valgono le relazioni seguenti per ogni intero $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$N_-(\hat{p}^{(k+1)}) = N_-(p^{(k+1)}), \quad N_0(\hat{p}^{(k+1)}) = N_0(p^{(k+1)}), \quad N_+(\hat{p}^{(k+1)}) = N_+(p^{(k+1)}).$$

Osservazione W.4.4.1. È facile vedere che usare la (4.4.4) per risolvere una singolarità di tipo 1 sulla riga $r^{(k)}$ (tale che $r_1^{(k)} = \cdots = r_v^{(k)} = 0$ ma $r_{v+1}^{(k)} \neq 0$, con $v \geq 1$) equivale (ove poi al Passo 3 della Procedura 4.4.1 si usi $\alpha = 1$) a sostituire al polinomio $p^{(k+1)}(s) = r^{(k+1)}(s) + r^{(k)}(s)$ il nuovo polinomio $\hat{p}^{(k+1)}(s) \triangleq r^{(k+1)}(s) + \left(1 + (-s^2)^v\right) r^{(k)}(s)$, per poi usare la tabella di Routh di $\hat{p}^{(k+1)}(s)$ come se fosse la tabella di $p^{(k+1)}(s)$. Il Corollario W.4.4.1 è applicabile a questo caso, in cui $\alpha(s) \triangleq 1 + (-s^2)^v$, in quanto in tal caso l'ipotesi $\deg(r^{(k+1)}(s)) > \deg(\alpha(s) \cdot r^{(k)}(s))$ del lemma è soddisfatta, e inoltre:

$$1 + (-s^2)^v \Big|_{s=\jmath\omega} = 1 + (-\jmath^2)^v (\omega^2)^v = 1 + \omega^{2v} > 0, \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{W.4.4.5}$$

Dunque tale applicazione del Corollario W.4.4.1 garantisce che l'uso della (4.4.4) (ove poi al Passo 3 della Procedura 4.4.1 si usi $\alpha = 1$), corrispondente a sostituire $p^{(k+1)}(s)$ con $\hat{p}^{(k+1)}(s)$, per risolvere una singolarità di tipo 1 non altera i numeri $N_-(p^{(k+1)})$, $N_0(p^{(k+1)})$ e $N_+(p^{(k+1)})$, numeri che di fatto sono alla base delle dimostrazioni dei Teoremi 4.4.1 e 4.4.2 tramite un'appropriata applicazione del Lemma 4.4.3 a pag. 214 (cfr quanto precisato subito dopo la definizione (4.4.9a) di $r^{(k)}(s)$ circa le dimostrazioni dei Teoremi 4.4.1 e 4.4.2, e l'Osservazione 4.4.3). □

Osservazione W.4.4.2. In presenza di una singolarità di tipo 2 sulla riga $r^{(k)}$ (tale che $r^{(k)} = 0$) si ha che $p^{(k+1)}(s) = r^{(k+1)}(s) + r^{(k)}(s) = r^{(k+1)}(s)$, e quindi è possibile fattorizzare $p^{(k+1)}(s)$ come $p^{(k+1)}(s) = s^w h(s^2)$, dove $w \geq 0$, $w \in \mathbb{Z}$, e $h(s^2)$ è un polinomio pari di s. Poiché $h(s^2) = h((-s)^2)$, ciò implica che ad ogni radice a parte reale positiva di $p^{(k+1)}(s)$ corrisponde una sua radice a parte reale negativa uguale e opposta e della stessa molteplicità; pertanto, per conoscere la disposizione di tutte le radici di $p^{(k+1)}(s)$

rispetto all'asse immaginario basta conoscere $N_+(p^{(k+1)})$, in quanto si avrà $N_-(p^{(k+1)}) = N_+(p^{(k+1)})$ e $N_0(p^{(k+1)}) = \deg(p^{(k+1)}) - (N_+(p^{(k+1)}) + N_-(p^{(k+1)}))$, ovvero $N_0(p^{(k+1)}) = \deg(p^{(k+1)}) - 2N_+(p^{(k+1)})$. Questa constatazione consentirà di capire il metodo usato per interpretare la tabella di Routh in presenza di singolarità di tipo 2. □

Sempre ricordando le (4.4.9), è facile vedere che usare la (4.4.5) per risolvere le singolarità di tipo 2 sulla riga $r^{(k)}$ equivale (ove poi al Passo 3 della Procedura 4.4.1 si usi $\alpha = 1$) a sostituire a $p^{(k+1)}(s) = r^{(k+1)}(s) + r^{(k)}(s) = r^{(k+1)}(s)$ il polinomio $\hat{p}^{(k+1)}(s) \triangleq r^{(k+1)}(s) + \frac{d}{ds}r^{(k+1)}(s)$. Chiaramente con tale sostituzione si ottiene un polinomio R-regolare, in quanto (usando per i coefficienti di $p^{(k+1)}(s)$ e di $\hat{p}^{(k+1)}(s)$ una notazione simile a quella definita dalla (4.4.1) per $p(s) \triangleq p^{(n)}(s)$) $\hat{p}_k^{(k+1)} = (k+1)p_{k+1}^{(k+1)} \neq 0$. Si dimostrerà ora che tale sostituzione garantisce anche che $N_+(\hat{p}^{(k+1)}) = N_+(p^{(k+1)})$ (ma non la proprietà più forte, valida per il metodo applicabile alle singolarità di tipo 1, che anche $N_-(\hat{p}^{(k+1)}) = N_-(p^{(k+1)})$ e $N_0(\hat{p}^{(k+1)}) = N_0(p^{(k+1)})$!); tuttavia, in vista dell'osservazione precedente, tale informazione è sufficiente a determinare la disposizione di tutte le radici di $p^{(k+1)}(s)$ rispetto all'asse immaginario (come si mostrerà in dettaglio).

Lemma W.4.4.2. *Se $q(s)$ è un polinomio a coefficienti reali fattorizzabile come $q(s) = s^w h(s^2)$, dove $h(s^2)$ è un polinomio pari di s e $w \geq 0$, $w \in \mathbb{Z}$, e se inoltre $\tilde{p}(s) \triangleq q(s) + \dfrac{dq(s)}{ds}$, allora $N_+(\tilde{p}) = N_+(q)$.*

Dimostrazione. Si consideri il polinomio $q_\eta(s) := q(s) + \eta\frac{dq(s)}{ds}$, in modo tale che $q_0(s) = q(s)$ e $q_1(s) = \tilde{p}(s)$. Per ogni $\eta > 0$, il Lemma W.4.4.1, applicato con $\tilde{q}(s) = \dfrac{dq(s)}{ds}$, $\alpha(s) = \eta$ e $\hat{p}(s) = q_\eta(s)$, garantisce che

$$N_-(q_\eta) = N_-(\tilde{p}), \quad N_0(q_\eta) = N_0(\tilde{p}), \quad N_+(q_\eta) = N_+(\tilde{p}). \qquad \text{(W.4.4.6)}$$

Tuttavia, il Lemma W.4.4.1 non è applicabile per $\eta = 0$.

Per mostrare che per $\eta > 0$ le radici non immaginarie di $q_\eta(s)$ restano nel semipiano aperto in cui si trovano per $\eta = 0$, si dica β la distanza dall'asse immaginario (cioè il modulo della parte reale) della radice di $q(s) = q_0(s)$ più vicina a tale asse, ma non appartenente ad esso. Essendo i coefficienti di $q_\eta(s)$ funzioni continue di η e le radici di $q_\eta(s)$ funzioni continue di essi, è possibile garantire (per continuità) l'esistenza di $\eta^* > 0$ tale che per ogni $\eta \in [0, \eta^*]$, ciascuna radice di $q_\eta(s)$ disti dalla corrispondente radice di $q(s)$ meno di $\beta/2$; ciò implica, in particolare, che le radici di $q_\eta(s)$ che appartengono al semipiano sinistro [destro] aperto per $\eta = 0$, rimarranno nello stesso semipiano aperto per ogni $\eta \in [0, \eta^*]$; ma allora le (W.4.4.6), ove $\tilde{p}(s) = q_1(s)$, implicano che tali radici rimarranno nello stesso semipiano aperto per ogni $\eta \geq 0$, e in particolare per ogni $\eta \in [0, 1]$.

Di conseguenza, l'unico modo in cui le (W.4.4.6) possono essere violate al variare di $\eta \in [0,1]$ è che una (o più) radici immaginarie (o nulle) di $q_0(s) = q(s)$ si spostino per $\eta > 0$ nel semipiano destro aperto o nel semipiano sinistro aperto. Si consideri allora una eventuale radice $\jmath\omega$ di $q(s)$ di molteplicità ν immaginaria o nulla (cioè con $\omega \in \mathbb{R}$); essa è quindi una radice di $\frac{dq}{ds}$ di molteplicità $\nu-1$; pertanto, $j\omega$ sarà una radice di $q_\eta(s)$ di molteplicità soltanto $\nu-1$ per ogni $\eta > 0$. Pertanto, delle ν radici coincidenti in $j\omega$ per $\eta = 0$, solo una radice semplice si sposta per $\eta > 0$; si mostrerà ora che tale radice si sposta nel semipiano sinistro aperto, e quindi che $N_+(q_\eta) = N_+(q)$, $\forall \eta \in [0,1]$, dimostrando così che $N_+(\tilde{p}) = N_+(q)$ (visto che, per ogni $\eta > 0$, la (W.4.4.6) è valida). Espandendo $q_\eta(s)$ con la formula di Taylor fino all'ordine ν intorno a $s = \jmath\omega$ [35] (si noti che, essendo $\jmath\omega$ radice di molteplicità $\nu-1$ di $q_\eta(s)$, i termini dell'espansione di ordine inferiore a $\nu-1$ sono nulli) si trova:

$$
\begin{aligned}
q_\eta(\jmath\omega+\delta) &= \frac{\delta^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\left.\frac{d^{\nu-1}q_\eta(s)}{ds^{\nu-1}}\right|_{s=\jmath\omega} + \frac{\delta^\nu}{\nu!}\left.\frac{d^\nu q_\eta(s)}{ds^\nu}\right|_{s=\jmath\omega} + o(\delta^\nu) = \qquad \text{(W.4.4.7)}\\
&= \eta\frac{\delta^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\left.\frac{d^\nu q(s)}{ds^\nu}\right|_{s=\jmath\omega} + \frac{\delta^\nu}{\nu!}\left(\left.\frac{d^\nu q(s)}{ds^\nu}\right|_{s=\jmath\omega} + \eta\,\frac{d^{\nu+1}q(s)}{ds^{\nu+1}}\right)\Bigg|_{s=\jmath\omega} + o(\delta^\nu) =\\
&= \frac{\delta^{\nu-1}}{\nu!}\left.\frac{d^\nu q(s)}{ds^\nu}\right|_{s=\jmath\omega}\cdot\left[\eta\nu+\delta+\eta\delta\left.\frac{d^{\nu+1}q(s)}{ds^{\nu+1}}\right|_{s=\jmath\omega}\cdot\left(\left.\frac{d^\nu q(s)}{ds^\nu}\right|_{s=\jmath\omega}\right)^{-1} + o(\delta)\right].
\end{aligned}
$$

Poiché, in base alle precedenti conclusioni, per $\eta > 0$ e abbastanza piccolo si ha, per continuità, una soluzione $\jmath\omega + \delta$ dell'equazione $q_\eta(\jmath\omega+\delta) = 0$ con $\delta \neq 0$ ma con modulo piccolo a piacere, in aggiunta alla soluzione con $\delta = 0$ di molteplicità $\nu-1$ evidenziata dalla (W.4.4.7), per η abbastanza piccolo tale soluzione con $\delta \neq 0$ sarà approssimata dal valore ottenuto per essa trascurando il termine $o(\delta)$ nella (W.4.4.7), cioè dal seguente valore di δ:

$$
\delta = -\frac{\nu\eta}{1+\eta\left.\frac{d^{\nu+1}q(s)}{ds^{\nu+1}}\right|_{s=\jmath\omega}\cdot\left(\left.\frac{d^\nu q(s)}{ds^\nu}\right|_{s=\jmath\omega}\right)^{-1}} \simeq -\nu\eta \qquad \text{(W.4.4.8)}
$$

(l'ulteriore approssimazione indicata nella (W.4.4.8) è motivata dall'ipotesi di considerare un valore di η molto piccolo), che corrisponde a una soluzione di $q_\eta(s) = 0$ per $s \simeq -\nu\eta + \jmath\omega$, che lascia l'asse immaginario nel passaggio da $\eta = 0$ a $\eta > 0$; chiaramente, tale radice entra nel semipiano sinistro aperto, e quindi il numero di radici di $q_\eta(s)$ nel semipiano destro aperto non cambia passando da $\eta = 0$ a $\eta > 0$, e pertanto vale la relazione $N_+(\tilde{p}) = N_+(q_\eta) = N_+(q)$ per ogni $\eta \geq 0$. □

Dimostrazione (del Teorema 4.4.3 a pag. 209). La veridicità dell'enunziato deriva dal Lemma 4.4.3 a pag. 214, dal Corollario W.4.4.1 (applicato come precisato nell'Osservazione W.4.4.1) e dal Lemma W.4.4.2, come ora si mostrerà. La dimostrazione sarà fatta sotto l'ipotesi che, nella costruzione della tabella di Routh completata secondo l'enunziato del teorema, al Passo 3 della Procedura 4.4.1 si usi ogni volta il fattore $\alpha = 1$. Nella successiva Osservazione W.4.4.3 sarà chiarito il motivo per cui la stessa dimostrazione vale anche nel caso generale, in cui al Passo 3 della Procedura 4.4.1 si usi ogni volta un fattore α anche diverso da 1.

Circa la parte a) dell'enunziato, definendo $p^{(k)}(s)$ con la (4.4.9b), cioè con la (W.4.4.4), il Lemma 4.4.3 nella sua forma più generale esplicitata nell'Osservazione 4.4.3 implica che, se sulla riga $r^{(k)}$ non c'è una singolarità, allora si ha sempre $N_0(p^{(k+1)}) = N_0(p^{(k)})$, e inoltre si ha $N_+(p^{(k+1)}) = N_+(p^{(k)})$ e $N_-(p^{(k+1)}) = N_-(p^{(k)}) + 1$ se c'è una permanenza di segno tra i primi elementi delle righe $r^{(k+1)}$ e $r^{(k)}$, mentre si ha $N_+(p^{(k+1)}) = N_+(p^{(k)}) + 1$ e $N_-(p^{(k+1)}) = N_-(p^{(k)})$ se c'è una variazione di segno tra tali elementi. Poiché è tale proprietà che consente di dimostrare il Teorema 4.4.1, calcolando $N_0(p)$, $N_+(p)$ e $N_-(p)$ mediante la valutazione in base ad essa di come variano $N_0(p^{(k)})$, $N_+(p^{(k)})$ e $N_-(p^{(k)})$ al crescere di k da 1 a n, o, alternativamente, al decrescere di k da n a 1, è chiaro che lo stesso tipo di dimostrazione continua a valere, con le stesse conclusioni, se nel costruire la tabella di Routh si incontrano soltanto singolarità di tipo 1 e la tabella è completata ogni volta secondo la (4.4.4), grazie alla proprietà espressa dal Corollario W.4.4.1 (applicato come precisato nell'Osservazione W.4.4.1), secondo la quale l'uso della (4.4.4) per completare la tabella in presenza di singolarità di tipo 1 sulla riga $r^{(k)}$ sostituisce al polinomio $p^{(k+1)}(s)$ un altro polinomio $\hat{p}^{(k+1)}(s)$, dello stesso grado, e caratterizzato da numeri di radici con parte reale negativa, nulla e positiva coincidenti con i corrispondenti numeri di $p^{(k+1)}(s)$. Resta così dimostrato il punto a) del teorema.

Circa il punto b), la conseguenza ora rilevata del Lemma 4.4.3 nella sua forma più generale esplicitata nell'Osservazione 4.4.3 e del Corollario W.4.4.1 sulla valutazione di $N_0(p)$, $N_+(p)$ e $N_-(p)$ in base al confronto tra i corrispondenti numeri che competono a $p^{(k+1)}(s)$ e a $p^{(k)}(s)$, considerati ora al decrescere di k da n a 1, implica che, con i simboli dell'enunciato, e, in particolare, supponendo che $r^{(m)}$ sia la riga su cui si è incontrata la prima singolarità di tipo 2, si ha

$$N_0(p) = N_0(p^{(m+1)}), \quad N_-(p) = N_{RP1}(p) + N_-(p^{(m+1)}),$$
$$N_+(p) = N_{RV1}(p) + N_+(p^{(m+1)}). \quad \text{(W.4.4.9)}$$

Inoltre quanto rilevato nell'Osservazione W.4.4.2 dimostra che

$$N_-(p^{(m+1)}) = N_+(p^{(m+1)}), \qquad N_0(p^{(m+1)}) = m + 1 - N_-(p^{(m+1)}) - N_+(p^{(m+1)}). \quad \text{(W.4.4.10)}$$

D'altra parte, la valutazione di $N_+(p^{(m+1)})$ grazie al Lemma W.4.4.2 può essere fatta completando la tabella secondo la (4.4.5), cioè sostituendo $p^{(m+1)}(s)$ con

$p^{(m+1)}(s) + \dfrac{dp^{(m+1)}(s)}{ds}$. Pertanto se successivamente intervengono eventualmente soltanto singolarità di tipo 1, in base a quanto prima rilevato risulterà $N_+(p^{(m+1)}) = N_{RV2}(p)$; ma anche ove intervengano una o più ulteriori singolarità di tipo 2, completando ogni volta di nuovo la tabella secondo la (4.4.5) resterà ogni volta inalterato il numero di radici con parte reale maggiore di zero passando dal polinomio $p^{(k+1)}(s)$ (se $r^{(k)}(s)$ è l'ulteriore riga nulla) al polinomio $p^{(k+1)}(s) + \dfrac{dp^{(k+1)}(s)}{ds}$ secondo la (4.4.5), risultando perciò alla fine anche in tal caso $N_+(p^{(m+1)}) = N_{RV2}(p)$.

Da quest'ultima relazione e dalle (W.4.4.9) e (W.4.4.10) segue che:

$$\begin{aligned}
N_+(p) &= N_{RV1}(p) + N_{RV2}(p),\\
N_-(p) &= N_{RP1}(p) + N_{RV2}(p),\\
N_0(p) &= m + 1 - 2N_{RV2}(p) =\\
&= m + 1 + N_{RP1}(p) + N_{RV1}(p) - (2N_{RV2}(p) + N_{RP1}(p) + N_{RV1}(p)) =\\
&= n - N_-(p) - N_+(p),
\end{aligned}$$

completando così la dimostrazione del teorema. □

Osservazione W.4.4.3. Ove nella costruzione della tabella di Routh, completata secondo l'enunciato del Teorema 4.4.3, si sostituisca, nel Passo 3 della Procedura 4.4.1, alla riga $r^{(k)}$ la riga $\tilde{r}^{(k)} \triangleq \alpha r^{(k)}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, nel calcolo delle righe seguenti sino alla prima che presenti una singolarità di tipo 2 si avrà che le righe di indice $k-1$, $k-3$,... della tabella modificata saranno uguali alle corrispondenti righe della tabella originaria (quella cioè che si sarebbe avuta senza tale sostituzione), mentre le righe di indice $k-2$, $k-4$,... della tabella modificata saranno pari alle corrispondenti righe della tabella originaria moltiplicate per α (come la riga di indice k). Essendo $\alpha > 0$, questo mostra che, ove nella costruzione della tabella non intervengano singolarità di tipo 2, l'uso (una o più volte) di tale fattore $\alpha \neq 1$ nel Passo 3 della Procedura 4.4.1 mantiene inalterati i numeri $N_{RP}(p)$ e $N_{RV}(p)$ che compaiono nelle (4.4.6); perciò le (4.4.6) restano vere anche ove si usi più volte un tale fattore positivo $\alpha \neq 1$. Ciò in particolare è vero ove non intervengano neanche singolarità di tipo 1, cioè nel caso del Teorema 4.4.1 a pag. 206.

Inoltre, per lo stesso tipo di ragionamento, l'uso di tale fattore positivo $\alpha \neq 1$ non modifica il fatto che eventualmente poi si presenti una prima singolarità di tipo 2 nella riga $r^{(m)}$, e in tal caso le righe della tabella modificata secondo la (4.4.5) dalla nuova riga $r^{(m)}$ in poi, sino a quella dove si presenti un'ulteriore singolarità di tipo 2, risulteranno o tutte moltiplicate per α, o tutte inalterate e prive di tale fattore. Tale fattore perciò non altera né gli interi $N_{RP1}(p)$ e $N_{RV1}(p)$ né l'intero $N_{RV2}(p)$ che compaiono nelle (4.4.7). Per le stesse precedenti considerazioni, neanche l'uso di un fattore positivo $\alpha \neq 1$

al Passo 3 della Procedura 4.4.1 relativamente alla citata riga $r^{(m)}$ o a una delle righe successive potrà alterare l'intero $N_{RV2}(p)$ nelle (4.4.7), che pertanto resteranno vere in ogni caso, anche ove un tale fattore positivo $\alpha \neq 1$ sia usato più volte nel calcolo dell'intera tabella di Routh. □

W.4.4.2 Dimostrazione del criterio di Jury

Il seguente lemma giustifica il Passo 3 della Procedura 4.4.2 a pag. 216.

Lemma W.4.4.3. *Se, nella costruzione della riga k della tabella di Jury secondo la Procedura 4.4.2, al Passo 3 si sostituisce alla riga $q^{(k)}$ la riga $\tilde{q}^{(k)} \triangleq \alpha q^{(k)}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, si ottiene una tabella equivalente (dal punto di vista della regolarità e del numero di variazioni e permanenze ove la tabella sia regolare) alla tabella che si sarebbe ottenuta senza la sostituzione indicata.*

Dimostrazione. In base alla (4.4.15), se si sostituisce alla riga $q^{(k)}$ la riga $\tilde{q}^{(k)} \triangleq \alpha q^{(k)}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, nel calcolo delle righe seguenti si avrà che, se la tabella originaria (cioè quella che si sarebbe ottenuta senza tale sostituzione) era regolare, le righe di indice $k-h$, per $h \in \mathbb{Z}$, $1 \leq h \leq k$, della tabella modificata saranno uguali alle corrispondenti righe della tabella originaria moltiplicate per α, e anche la tabella modificata risulterà regolare; inoltre, essendo $\alpha > 0$, è chiaro che le due tabelle così ottenute avranno lo stesso numero di variazioni e permanenze. Per lo stesso motivo, se nella tabella originaria il primo elemento della riga di indice $k-\bar{h}$ (con $1 \leq \bar{h} \leq k$) era nullo, dando luogo ad una singolarità, lo stesso avverrà nella tabella modificata. □

Si dica ora *polinomio reciproco* del polinomio $p(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \cdots + p_1 z + p_0$ di grado n (cioè con $p_n \neq 0$) il polinomio

$$\hat{p}(z) := z^n \cdot p\left(\frac{1}{z}\right) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_{n-1} z + p_n. \tag{W.4.4.11}$$

Le seguenti proprietà, di dimostrazione immediata, mostrano che le radici di $\hat{p}(z)$ sono le inverse delle radici non nulle di $p(z)$.

Proprietà W.4.4.1. *Se $z_0 \neq 0$ è una radice di $p(z)$ di molteplicità ν, allora z_0^{-1} è una radice di $\hat{p}(z)$ (definito dalla* (W.4.4.11)*) di molteplicità ν.*

Proprietà W.4.4.2. *Se $z_0 = 0$ è una radice di $p(z)$ di molteplicità ν (ovvero, $p_0 = p_1 = \cdots = p_{\nu-1} = 0$), allora $\hat{p}(z)$ (definito dalla* (W.4.4.11)*) è un polinomio di grado $n-\nu$.*

Proprietà W.4.4.3. *Se $p(z)$ non ha radici nulle (ovvero, $p_0 \neq 0$), allora $p(z)$ è il polinomio reciproco di $\hat{p}(z)$ (definito dalla* (W.4.4.11)*), e inoltre $N_<(p) = N_>(\hat{p})$, $N_=(p) = N_=(\hat{p})$, $N_>(p) = N_<(\hat{p})$.*

Un polinomio $p(z)$ di grado n si dice ***J-regolare*** se $|p_n| \neq |p_0|$. Invertendo il procedimento usato nell'inizializzazione della Procedura 4.4.2, si può associare ad ogni riga $q^{(k)}$ di una tabella di Jury regolare un polinomio di grado k secondo la relazione

$$m^{(k)}(z) = q_0^{(k)} z^k + q_1^{(k)} z^{k-1} + q_2^{(k)} z^{k-2} + + \cdots + q_{k-1}^{(k)} z + q_k^{(k)}. \tag{W.4.4.12}$$

Per un polinomio $p(z)$ J-regolare, la (4.4.14) per $k = n$ corrisponde a calcolare un nuovo polinomio $q(z) = m^{(n-1)}(z)$ secondo la relazione:

$$q(z) \triangleq \frac{1}{z}\bar{q}(z), \qquad \bar{q}(z) \triangleq \left(p(z) - \frac{p_0}{p_n}\hat{p}(z)\right), \tag{W.4.4.13}$$

ovvero (si confronti il commento sul Passo 2 che segue immediatamente la Procedura 4.4.2, e quello sulla scelta di γ nell'Esempio 4.4.6) nel generare $\bar{q}(z)$ sottraendo da $p(z)$ il suo reciproco $\hat{p}(z)$ moltiplicato per un coefficiente tale da rendere nullo il coefficiente di z^0 in $\bar{q}(z)$, producendo così una radice in $z = 0$ che viene eliminata dalla divisione per z nella definizione di $q(z)$.

Sotto l'ipotesi di regolarità $|p_n| \neq |p_0|$, per $\eta \in [0, 1]$ si consideri il polinomio

$$q_\eta(z) \triangleq \begin{cases} p(z) - \eta\frac{p_0}{p_n}\hat{p}(z), & \text{se } |p_n| > |p_0|, \\ \eta p(z) - \frac{p_0}{p_n}\hat{p}(z), & \text{se } |p_n| < |p_0|. \end{cases} \tag{W.4.4.14}$$

Si vede facilmente che $q_\eta(z)$ è un polinomio di grado n per ogni $\eta \in [0, 1]$, i cui coefficienti sono funzioni continue di η; quindi, anche le radici di $q_\eta(z)$ sono funzioni continue di η. Inoltre $q_\eta(z)$ coincide con $\bar{q}(z)$ per $\eta = 1$, mentre per $\eta = 0$ coincide con $p(z)$ se $|p_n| > |p_0|$, oppure coincide (a meno di un fattore costante non nullo) con $\hat{p}(z)$ se $|p_n| < |p_0|$. Tali considerazioni dimostrano il seguente Lemma.

Lemma W.4.4.4. *Se $|p_n| \neq |p_0|$, allora le radici del polinomio $q_\eta(z)$ definito dalle* (W.4.4.11), (W.4.4.14) *descrivono n curve continue nel piano complesso al variare di $\eta \in [0, 1]$. Per $\eta = 1$ tali curve passano per le n radici del polinomio $\bar{q}(z) = zq(z)$, ove $\bar{q}(z)$ e $q(z)$ sono i polinomi definiti dalle* (W.4.4.13), *mentre per $\eta = 0$ tali curve passano per le n radici di $p(z)$ se $|p_n| > |p_0|$, oppure per le n radici di $\hat{p}(z)$ se $|p_n| < |p_0|$.*

Il seguente lemma mostra che se $|p_n| \neq |p_0|$, allora il fatto che al variare di $\eta \in [0, 1]$ le curve descritte dalle radici di $q_\eta(z)$ non tocchino né attraversino la circonferenza unitaria è equivalente al fatto che $p(z)$ sia privo di radici di modulo unitario.

Lemma W.4.4.5. *Se $|p_n| \neq |p_0|$, allora se $z_0 \in \mathbb{C}$ è tale che $|z_0| = 1$, si ha $p(z_0) = 0$ se e solo se $q_\eta(z_0) = 0$ per un arbitrario valore di $\eta \in [0, 1]$, e se e solo se $q_\eta(z_0) = 0$ per ogni $\eta \in [0, 1]$, ove $q_\eta(z)$ è definito dalle* (W.4.4.11), (W.4.4.14).

Dimostrazione. Si consideri dapprima il caso relativo a $|p_n| > |p_0|$. Sia $\bar{\eta} \in [0,1]$ tale che z_0 sia una radice di $q_{\bar{\eta}}(z)$ e $|z_0| = 1$ (si noti che per $\bar{\eta} = 0$ si ottiene come caso particolare l'ipotesi che z_0 sia una radice di $p(z)$). Si ricordi che $|z_0| = 1$ implica che $z_0^{-1} = z_0^*$ (ovvero il reciproco e il complesso coniugato di un numero complesso di modulo unitario coincidono); inoltre, essendo $q_{\bar{\eta}}(z)$ un polinomio a coefficienti reali, si ha $q_{\bar{\eta}}(z_0^*) = 0 = q_{\bar{\eta}}(z_0^{-1})$. Dalla definizione di $q_\eta(z)$ si ha:

$$q_{\bar{\eta}}(z_0) = p(z_0) - \bar{\eta}\frac{p_0}{p_n} z_0^n p\left(\frac{1}{z_0}\right) = 0, \quad q_{\bar{\eta}}\left(\frac{1}{z_0}\right) = p\left(\frac{1}{z_0}\right) - \bar{\eta}\frac{p_0}{p_n}\frac{1}{z_0^n} p\left(z_0\right) = 0.$$

Combinando le due equazioni precedenti si ottiene

$$p(z_0)\left[1 - \bar{\eta}^2 \frac{p_0^2}{p_n^2}\right] = 0;$$

ma essendo $\bar{\eta} \le 1$ e $|p_n| > |p_0|$, si ha $\left[1 - \bar{\eta}^2 \frac{p_0^2}{p_n^2}\right] \neq 0$ e quindi deve essere $p(z_0) = 0$. Per quanto già rilevato su z_0 e z_0^{-1}, deve essere anche $p\left(\frac{1}{z_0}\right) = 0$. Ora, essendo z_0 e z_0^{-1} radici di $p(z)$, per la Proprietà W.4.4.1 z_0 e z_0^{-1} sono anche radici di $\hat{p}(z)$; pertanto, per la (W.4.4.14) sono radici di $q_\eta(z)$ per ogni η.

Nel caso $|p_n| < |p_0|$ l'ipotesi che per un certo $\bar{\eta} \in [0,1]$ z_0 sia radice di $q_{\bar{\eta}}(z)$ non comprende l'ipotesi che z_0 sia radice di $p(z)$ come caso particolare, ma con ragionamenti simili a quelli precedenti permette di mostrare che z_0 e z_0^{-1} siano radici di $p(z)$ e $\hat{p}(z)$, e perciò di $q_\eta(z)$ per ogni $\eta \in [0,1]$. Anche in tal caso però (come peraltro in quello precedente) l'ipotesi che z_0 (e perciò anche z_0^{-1}) sia radice di $p(z)$ implica direttamente, per la Proprietà W.4.4.1, che z_0 e z_0^{-1} siano anche radici di $\hat{p}(z)$, e perciò, per la (W.4.4.14), radici di $q_\eta(z)$ per ogni η. □

Corollario W.4.4.2. *Definendo il polinomio $q(z)$ con le* (W.4.4.11), (W.4.4.13), *se $|p_n| \neq |p_0|$, allora $N_=(p) = 0$ se e solo se $N_=(q) = 0$.*

Dimostrazione. Il precedente lemma implica che $N_=(p) = 0$ se e solo se $N_=(\bar{q}) = 0$, essendo $\bar{q}(z) = q_1(z)$. Ma per la (W.4.4.13) $q(z)$ ha tutte e sole le stesse radici di $\bar{q}(z)$ tranne una radice nulla; di qui la tesi. □

Tenendo conto degli enunziati precedenti, si può dimostrare il lemma seguente.

Lemma W.4.4.6. *Definendo il polinomio $q(z)$ con le* (W.4.4.11), (W.4.4.13), *se $|p_n| \neq |p_0|$, e se $N_=(q) = 0$, allora*

$$\begin{array}{llll} |p_n| > |p_0| & \Longrightarrow & N_<(p) = N_<(q) + 1, & N_>(p) = N_>(q); \\ |p_n| < |p_0| & \Longrightarrow & N_<(p) = N_>(q), & N_>(p) = N_<(q) + 1. \end{array}$$

Dimostrazione. Si considerano separatamente i casi $|p_n| > |p_0|$ e $|p_n| < |p_0|$, ricordando che l'ipotesi che $N_{=}(q) = 0$ equivale all'ipotesi $N_{=}(\bar{q}) = 0$.

Nel caso $|p_n| > |p_0|$, poiché, in base ai lemmi precedenti, al variare di η da 0 a 1 le radici di $q_\eta(z)$ variano con continuità con η dalle n radici di $p(z)$ per $\eta = 0$ alle n radici di $\bar{q}(z) = zq(z)$ per $\eta = 1$, e inoltre nessuna di esse può attraversare la circonferenza di raggio unitario (per l'ipotesi $N_{=}(\bar{q}) = 0$ e il Lemma W.4.4.5), si deducono immediatamente le relazioni $N_{<}(p) = N_{<}(\bar{q})$, $N_{>}(p) = N_{>}(\bar{q})$. Poiché nella (W.4.4.13) si ottiene $q(z)$ dividendo $\bar{q}(z)$ per z, e in tal modo viene eliminata da $\bar{q}(z)$ una radice in $z = 0$ (di modulo minore di 1), si ha che $N_{<}(\bar{q}) = N_{<}(q) + 1$, $N_{>}(\bar{q}) = N_{>}(q)$, e quindi si ottengono le relazioni indicate.

Nel caso $|p_n| < |p_0|$, per gli stessi motivi si deducono le analoghe relazioni $N_{<}(\hat{p}) = N_{<}(\bar{q})$ e $N_{>}(\hat{p}) = N_{>}(\bar{q})$. Inoltre anche in questo caso usando la (W.4.4.13) si ottiene $q(z)$ dividendo $\bar{q}(z)$ per z, e in tal modo viene eliminata da $\bar{q}(z)$ una radice in $z = 0$ (di modulo minore di 1), e quindi si ha che $N_{<}(\hat{p}) = N_{<}(q) + 1$, $N_{>}(\hat{p}) = N_{>}(q)$. Perciò l'ipotesi $|p_n| < |p_0|$ (che implica $p_0 \neq 0$) e la Proprietà W.4.4.3 implicano che $N_{<}(p) = N_{>}(\hat{p})$ e $N_{>}(p) = N_{<}(\hat{p})$, dimostrando la tesi. □

Il Lemma W.4.4.6 consente di dimostrare il Teorema 4.4.4 a pag. 217.

Dimostrazione (del Teorema 4.4.4). La prova è per induzione sul grado n di $p(z)$.
[*Passo base*] Per $n = 1$, $p(z) = p_1 z + p_0$ ha l'unica radice $z_1 = -\frac{p_0}{p_1}$, e la prima colonna della tabella di Jury è $\begin{bmatrix} p_1 \\ \dfrac{p_1^2 - p_0^2}{p_1} \end{bmatrix}$. È facile verificare che $N_{JP}(p) = N_{<}(p)$ e $N_{JV}(p) = N_{>}(p)$, in quanto la regolarità implica che $p_1^2 - p_0^2 \neq 0$ e quindi che $N_{=}(p) = 0$ e

$$N_{JP}(p) = 1 \Rightarrow p_1^2 - p_0^2 > 0 \Rightarrow \frac{p_0^2}{p_1^2} < 1 \Rightarrow \left| -\frac{p_0}{p_1} \right| = |z_1| < 1$$
$$N_{JV}(p) = 1 \Rightarrow p_1^2 - p_0^2 < 0 \Rightarrow \frac{p_0^2}{p_1^2} > 1 \Rightarrow \left| -\frac{p_0}{p_1} \right| = |z_1| > 1.$$

[*Passo induttivo*] Si supponga l'asserto dimostrato per tutti i polinomi di grado minore o uguale a $n - 1$, e si consideri un polinomio $p(z)$ di grado n. Si noti che la tabella di Jury di $q(z)$ (il polinomio corrispondente alla seconda riga della tabella di Jury di $p(z)$) si ottiene eliminando la prima riga dalla tabella di Jury di $p(z)$. Per l'ipotesi induttiva, per $q(z)$ si ha $N_{=}(q) = 0$, $N_{JP}(q) = N_{<}(q)$ e $N_{JV}(q) = N_{>}(q)$.

Nel caso $|p_n| > |p_0|$, il Corollario W.4.4.2 e il Lemma W.4.4.6 implicano che $N_{<}(p) = N_{<}(q) + 1$, $N_{>}(p) = N_{>}(q)$ e $N_{=}(p) = N_{=}(q) = 0$; inoltre è facile vedere che $N_{JV}(p) = N_{JV}(q)$, $N_{JP}(p) = N_{JP}(q) + 1$ e quindi:

$$N_{<}(p) = N_{<}(q) + 1 = N_{JP}(q) + 1 = N_{JP}(p),$$
$$N_{>}(p) = N_{>}(q) = N_{JV}(q) = N_{JV}(p);$$

resta così provata la tesi.

Nel caso $|p_n| < |p_0|$, il Corollario W.4.4.2 e il Lemma W.4.4.6 implicano che $N_{<}(p) = N_{>}(q)$, $N_{>}(p) = N_{<}(q)+1$ e $N_{=}(p) = N_{=}(q) = 0$; inoltre è facile vedere che $N_{JP}(p) = N_{JV}(q)$ e $N_{JV}(p) = N_{JP}(q) + 1$, e pertanto

$$N_{<}(p) = N_{>}(q) = N_{JV}(q) = N_{JP}(p),$$
$$N_{>}(p) = N_{<}(q) + 1 = N_{JP}(q) + 1 = N_{JV}(p);$$

segue la tesi, tenendo conto del Lemma W.4.4.3. □

Per la dimostrazione del Teorema 4.4.5 a pag. 218 è utile il seguente lemma.

Lemma W.4.4.7. *Se $p(z)$ è di Schur, allora $p_n^2 - p_0^2 > 0$.*

Dimostrazione. Scomponendo $p(z)$ nei suoi n fattori elementari corrispondenti alle sue n radici si ha $p(z) = p_n(z - z_1)\cdots(z - z_n)$, dove $\{z_1, \dots, z_n\}$ sono le radici (eventualmente ripetute) di $p(z)$. Svolgendo i prodotti, si ricava che $p_0 = p_n \prod_{i=1}^n z_i$, e perciò:

$$p_0^2 = p_n^2 \prod_{i=1}^{n} z_i^2 < p_n^2 \tag{W.4.4.15}$$

poiché $p(z)$ è di Schur, e quindi $|z_i| < 1$, per $i = 1, \dots, n$. □

Dimostrazione (del Teorema 4.4.5). *(Sufficienza)* Discende dal Teorema 4.4.4.

(Necessità) Sotto l'ipotesi di regolarità, il Teorema 4.4.4 implica che $N_{JP}(p) = n$; pertanto, si deve solo mostrare la necessità della condizione di regolarità affinché $p(z)$ sia di Schur. La prova è per induzione sul grado n di $p(z)$.

[*Passo base*] Per $n = 1$, si ha $p(z) = p_1 z + p_0$, e la regolarità discende immediatamente dal Lemma W.4.4.7.

[*Passo induttivo*] Si supponga l'asserto dimostrato per tutti i polinomi di grado minore o uguale a $n-1$, e si consideri il polinomio $p(z)$ di grado n, che per ipotesi è di Schur e quindi $N_{<}(p) = n$, $N_{>}(p) = N_{=}(p) = 0$. Per il Lemma W.4.4.7, $p(z)$ è J-regolare; inoltre, la seconda riga della tabella di Jury di $p(z)$ corrisponde a un polinomio $q(z)$ di grado $n - 1$, che in base ai Lemmi W.4.4.6 e W.4.4.7 e al Corollario W.4.4.2 è di Schur (in quanto in base al primo lemma $N_{<}(q) = N_{<}(p) - 1 = n - 1$, $N_{>}(q) = N_{>}(p) = 0$, e in base al corollario $N_{=}(q) = N_{=}(p) = 0$); ma poiché $q(z)$ è di grado $n-1$, ad esso si applica l'ipotesi induttiva che implica che la tabella di Jury di $q(z)$ (coincidente con le ultime n righe della tabella di Jury di $p(z)$) è regolare; e quindi anche la tabella di Jury di $p(z)$ lo è, essendo $p(z)$ di grado n e quindi $p_n \neq 0$ per ipotesi. □

W.4.5 Complementi sul metodo diretto di Lyapunov

Dimostrazione (**del Teorema 4.5.3 a pag. 234**). Si dimostra solo il caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, essendo la dimostrazione dell'altro caso analoga. Per assurdo, si supponga che x_e sia stabile, e si prendano $\varepsilon > 0$, $\delta_\varepsilon > 0$ secondo la Definizione 4.2.1 a pag. 187, con ε sufficientemente piccolo da garantire che $\dot{V}(x) > 0$ per ogni $x \in \bar{\mathcal{B}}_\varepsilon(x_e)$, $x \neq x_e$. La stabilità implica che, per ogni $x_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\varepsilon}(x_e)$, si ha $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{B}_\varepsilon(x_e)$ e quindi anche $\dot{V}(\varphi(t, x_0)) \geq 0$, per ogni $t \geq 0$; pertanto, si ha $V(x(t)) \geq V(x(0)) = V(x_0)$, per ogni $t \geq 0$. Sia $x_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\varepsilon}(x_e)$, $x_0 \neq x_e$ tale che $V(x_0) > 0$ (tale x_0 esiste grazie all'ipotesi *ii*)); allora $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{Q}$, per ogni $t \geq 0$, dove $\mathcal{Q} \triangleq \{x : V(x) \geq V(x_0), x \in \bar{\mathcal{B}}_\varepsilon(x_e)\}$. Essendo l'insieme $\mathcal{Q}$ chiuso (come è facile verificare) e limitato, e le funzioni $V(\cdot)$ e $\dot{V}(\cdot)$ continue, per il Lemma 4.5.2 a pag. 227 esistono finiti $M = \max_{x \in \mathcal{Q}} V(x)$ e $m = \min_{x \in \mathcal{Q}} \dot{V}(x)$; inoltre, $m > 0$ in quanto la definizione di $\mathcal{Q}$ implica che $x_e \notin \mathcal{Q}$. Ma allora per $\bar{t} > \dfrac{M - V(x_0)}{m}$ si ha la contraddizione che

$$V(x(\bar{t})) = V(x_0) + \int_0^{\bar{t}} \dot{V}(x(\tau))d\tau \geq V(x_0) + m\bar{t} > M,$$

e quindi $x(\bar{t}) \notin \mathcal{Q}$; pertanto, si deve dedurre l'instabilità di x_e. □

Esempio W.4.5.1. Si consideri lo stato di equilibrio $x_e = 0$ per il sistema a tempo discreto:

$$x_1(k+1) = -4x_1(k)x_2(k) + 5x_2^2(k), \qquad x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + x_1^2(k).$$

La funzione $V(x) = x_1 + x_2$ è una candidata ammissibile per il Teorema 4.5.3, in quanto $V(x_e) = 0$ e $V(x) > 0$ nel semipiano $x_2 > -x_1$ (e quindi $V(x) > 0$ in punti arbitrariamente vicini a $x_e = 0$). È inoltre facile verificare che $\delta_V(x) = V(f(x)) - V(x) \succ 0$, in quanto:

$$\delta_V(x) = (-4x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 + x_2 + x_1^2) - (x_1 + x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2,$$

che si annulla soltanto per $x_2 = 0$ e $x_1 = 2x_2 = 0$, e risulta perciò definita positiva globalmente in x_e; quindi in base al Teorema 4.5.3 si deduce l'instabilità di x_e. □

Dimostrazione (**del Teorema 4.5.4 a pag. 234**). Procedendo in modo simile alla dimostrazione del Teorema 4.5.3, si supponga che x_e sia stabile, si scelgano $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \gamma$, e $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\varepsilon}(x_e)$, si abbia $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{B}_\varepsilon(x_e)$ per ogni $t \geq 0$. Si noti poi che, grazie all'ipotesi *i*), l'insieme $\mathcal{B}_{\delta_\varepsilon}(x_e) \cap \mathcal{A}$ è non vuoto e contiene almeno uno stato $x_0 \neq x_e$ (sia ove x_e sia un punto interno di $\mathcal{A}$, sia ove $x_e \in \partial\mathcal{A}$). Essendo poi $\delta_\varepsilon \leq \varepsilon < \gamma$, per $x_0 \neq x_e$ e $x_0 \in \mathcal{B}_{\delta_\varepsilon}(x_e) \cap \mathcal{A}$ si avrà $V(x_0) > 0$, $\dot{V}(x_0) > 0$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{B}_\varepsilon(x_e)$ per ogni $t \geq 0$. Grazie all'ipotesi *ii*) su $\dot{V}(x)$, la funzione $V(\varphi(t, x_0))$ assumerà valori via via crescenti con t a partire dal valore $V(x_0) > 0$ all'istante $t = 0$, finché t è tale che $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{B}_\varepsilon(x_e) \cap \mathcal{A}$, ciò che potrebbe cessare di avvenire soltanto se per un certo valore $\bar{t}$ di t fosse $\varphi(\bar{t}, x_0) \in \mathcal{B}_\varepsilon(x_e) \cap \partial\mathcal{A}$: ma questo per l'ipotesi *iii*) implicherebbe $V(\varphi(\bar{t}, x_0)) = 0$, ciò che è impossibile per la continuità delle funzioni $\varphi(t,x_0)$ rispetto a t e $V(x)$ rispetto a x. Si è così mostrato che $\varphi(t,x_0) \in \mathcal{B}_\varepsilon(x_e) \cap \mathcal{A}$, $\forall t \geq t_0$. Definendo poi $\mathcal{Q} \triangleq \{x : V(x) \geq V(x_0), x \in \bar{\mathcal{B}}_\varepsilon(x_e) \cap \bar{\mathcal{A}}\}$, tale insieme risulta chiuso e limitato, e poiché in virtù delle ipotesi le funzioni $V(x)$ e $\dot{V}(x)$ sono continue, per il Lemma 4.5.2 esistono finiti il $\max_{x\in\mathcal{Q}} V(x)$ e il $\min_{x\in\mathcal{Q}} \dot{V}(x)$; ma osservando che per l'ipotesi *iii)* $\mathcal{Q} \cap \partial\mathcal{A} = \emptyset$ (in quanto se $x \in \mathcal{Q}$ allora $V(x) \geq V(x_0) > 0$, mentre per la *iii)* se $x \in \bar{\mathcal{B}}_\varepsilon(x_e) \cap \partial\mathcal{A}$ allora $V(x) = 0$) si ha che $m \triangleq \min_{x\in\mathcal{Q}} \dot{V}(x) > 0$; da questo punto in poi la dimostrazione può essere completata come la parte finale della dimostrazione del Teorema 4.5.3. □

Esempio W.4.5.2. Si consideri lo stato di equilibrio $x_e = 0$ per il sistema:

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2^2, \qquad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2.$$

La funzione $V(x) = x_1x_2$ è una candidata ammissibile per il Teorema 4.5.4 prendendo $\mathcal{A} = \{x : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ e $\gamma = 1$, in quanto $V(x) > 0$ per $x \in \mathcal{A}$, $x_e = 0 \in \bar{\mathcal{A}}$, $V(x) = 0$ per $x \in \partial\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_\gamma(x_e)$ e per $x = x_e$, e inoltre si ha $\dot{V}(x) = \nabla V(x) f(x) > 0$ per $x \in \mathcal{A}$, in quanto:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 = x_2 x_1 + x_2^3 - x_1 x_2 + x_1^3 = x_2^3 + x_1^3.$$

In base al Teorema 4.5.4, si deduce l'instabilità di x_e. Si noti che, non essendo $\dot{V}(\cdot) \succ 0$ in x_e, non si può arrivare alla stessa conclusione usando la $V(\cdot)$ proposta e il Teorema 4.5.3. □

L'esempio seguente illustra l'utilizzo tipico del Teorema 4.5.5 a pag. 234: nei casi in cui il Teorema 4.5.1 consente di verificare con una certa $V(\cdot)$ la sola stabilità di un certo stato di equilibrio x_e (in quanto la $\dot{V}(\cdot)$ $[\delta_V(\cdot)]$ è solo semidefinita negativa), il Teorema 4.5.5 consente di mostrare che x_e è asintoticamente stabile a patto che sia possibile mostrare che l'unica traiettoria completa contenuta in $\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathcal{B}_\rho(x_e) : \dot{V}(x) = 0\}$ $[\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathcal{B}_\rho(x_e) : \delta_V(x) = 0\}]$ è proprio x_e.

Esempio W.4.5.3. Si considerino gli stati di equilibrio con $x_1 = 2h\pi$, $x_2 = 0$, $h \in \mathbb{Z}$ per il pendolo dell'Esempio 4.2.3 a pag. 191. La funzione $V(x) = 2\left(\frac{g}{l}\right)\sin^2\left(\frac{x_1}{2}\right) + \frac{1}{2}x_2^2$ è definita positiva negli stati di equilibrio considerati. Ricordando che $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$, dal calcolo di $\dot{V}(x) = \nabla V(x) f(x)$ si ha:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 4\left(\frac{g}{l}\right)\sin\left(\frac{x_1}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1}{2}\right)\frac{1}{2}x_2 - \frac{g}{l}x_2\sin(x_1) - \frac{\zeta}{ml}x_2^2 = -\frac{\zeta}{ml}x_2^2,$$

e quindi $\dot{V}(\cdot) \preccurlyeq 0$ negli stati di equilibrio considerati, e il Teorema 4.5.1 consente solo di dire che tali stati sono stabili. Dal momento che nel pendolo considerato sono presenti degli attriti (rappresentati dal coefficiente $\zeta > 0$), ci si aspetterebbe di poter dimostrare la stabilità asintotica degli stati di equilibrio considerati; tuttavia per fare ciò con il Teorema 4.5.1, è necessario trovare una $V(x)$ alternativa. Si può però giungere alla stessa conclusione senza cambiare $V(x)$, semplicemente applicando il Teorema 4.5.5, in quanto (come ora si dimostrerà) in un intorno sufficientemente piccolo dello stato di equilibrio considerato, l'unica traiettoria completamente contenuta nell'insieme in cui $\dot{V}(x)$ è nulla è proprio lo stato di equilibrio stesso. Infatti si ha $\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathcal{B}_\rho(x_e) : \dot{V}(x) = 0\} = \{x : x_2 = 0, |x_1 - x_{e,1}| < \rho\}$, ovvero $\mathcal{N}$ è l'insieme degli stati con velocità angolare nulla e posizione angolare sufficientemente vicina a $2h\pi$. L'unica traiettoria completamente contenuta in tale insieme è lo stato di equilibrio $x_e = [2h\pi \;\; 0]'$, in quanto da ogni altro stato di $\mathcal{N}$, se $\rho < \pi$, il pendolo evolve acquisendo una velocità non nulla, e quindi uscendo da $\mathcal{N}$. Quanto appena asserito può essere verificato notando che se all'istante iniziale si ha che $x(0) = x_0 \in \mathcal{N}$ (e quindi $\dot{V}(x_0) = 0$) e $x_0 \neq [2h\pi \quad 0]'$, allora non è possibile che $\dot{V}(x(t)) = 0$, $\forall t \geq 0$ (ovvero $x(t)$ deve "uscire" da $\mathcal{N}$ per $t > 0$): infatti $\dot{V}(x_0) = 0$ implica che $x_2 = 0$ nell'istante iniziale, mentre il fatto che in esso $0 < |x_1 - x_{e,1}| < \rho$ con $\rho < \pi$ e $x_1 \neq x_{e,1}$ implica che in tale istante $\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) \neq 0$, e quindi che per $t > 0$ immediatamente dopo l'istante iniziale si avrà $x_2 \neq 0$, e perciò $\dot{V}(x(t)) \neq 0$ (ovvero, $x(t) \notin \mathcal{N}$). □

Si noti che quanto appena visto è un fenomeno abbastanza frequente nell'analisi di un'ampia classe di sistemi meccanici con attrito, per i quali l'energia totale del sistema (data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, quest'ultima definita in modo tale da annullarsi nello stato di equilibrio x_e considerato) è una funzione candidata di Lyapunov la cui derivata $\dot{V}(\cdot)$ è solo semidefinita negativa; in tal caso per dimostrare la stabilità asintotica di x_e si può usare il Teorema 4.5.5 in modo analogo a quanto appena mostrato.

Allo scopo di dimostrare il Teorema 4.5.5, è opportuno introdurre preliminarmente alcune nozioni supplementari, che comunque rivestono un interesse indipendente.

Definizione W.4.5.1. *Un insieme $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ si dice* insieme invariante *per il sistema* (4.1.3) *se $x_0 \in \mathcal{V}$ implica $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{V}$, $\forall t \geq 0$.*

Si noti che il concetto di invarianza è stato già sfruttato implicitamente nella dimostrazione del Teorema 4.5.2, ove si fa uso del fatto che, se $\dot{V} \prec 0$ $[\delta_V \prec 0]$ sull'insieme $\mathcal{V}_c \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$, allora $\mathcal{V}_c$ è un insieme invariante, e quindi $x_0 \in \mathcal{V}_c$ implica $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{V}_c$, $\forall t \geq 0$.

Definizione W.4.5.2. *Sia γ la traiettoria corrispondente al moto $\varphi(\cdot, x_0)$ del sistema* (4.1.3)*. Il punto p si dice* punto limite *della traiettoria γ se esiste una successione di tempi $\{t_k\}$ tale che $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ e $\lim_{k\to+\infty} x(t_k) = p$. Si dice* insieme limite *di γ, e si indica con $\omega(\gamma)$, l'insieme formato da tutti i punti limite di γ.*

In base alla precedente definizione, x_e è un punto limite della traiettoria γ (in simboli, $x_e \in \omega(\gamma)$) se la traiettoria passa arbitrariamente vicino a x_e per tempi arbitrariamente grandi; si noti che se γ corrisponde al moto $\varphi(\cdot, x_0)$, l'insieme limite $\omega(\gamma)$ può esistere anche in casi in cui $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t, x_0)$ non esiste. Si noti infine che l'insieme limite di γ è definito in base al **moto** che dà origine alla traiettoria γ.

Lemma W.4.5.1. *Sia γ la traiettoria corrispondente al moto del sistema* (4.1.3) *associato allo stato iniziale x_0, e sia $f(\cdot) \in \mathcal{C}^1$ $[f(\cdot) \in \mathcal{C}^0]$. Allora l'insieme limite $\omega(\gamma)$ è chiuso e invariante.*

Dimostrazione. *Per mostrare che $\omega(\gamma)$ è chiuso*, occorre mostrare che, per ogni punto di accumulazione p di $\omega(\gamma)$, si ha che p appartiene a $\omega(\gamma)$. Si fissi $\delta \in (0, 1)$ in modo che $\lim_{h\to+\infty} \delta^h = 0$, e si noti che per la definizione di p per

ogni h intero positivo deve esistere $q_h \in \omega(\gamma)$ tale che $q_h \neq p$ e $q_h \in \mathcal{B}_{\delta^h}(p)$. Per definizione di $\omega(\gamma)$, esiste una successione $\{t_k^{(h)}\}$ tale che $\lim_{k\to+\infty} t_k^{(h)} = +\infty$ e $\lim_{k\to+\infty} x(t_k^{(h)}) = q_h$; perciò esiste $\bar{k}(h)$ tale che $\left\|x(t_k^{(h)}) - q_h\right\| < \delta^h$ per ogni $k \geq \bar{k}(h)$; ma allora $\left\|x(t_k^{(h)}) - p\right\| \leq \left\|x(t_k^{(h)}) - q_h\right\| + \|q_h - p\| < 2\delta^h$, per ogni $k \geq \bar{k}(h)$. Da quanto si è ora mostrato si evince che esiste una successione di tempi $\{\bar{t}_h\}$, con $\bar{t}_h \geq t_{\bar{k}(h)}^{(h)}$, tale che $\lim_{h\to+\infty} \bar{t}_h = +\infty$ e tale che inoltre $\|x(\bar{t}_{h+j}) - p\| < 2\delta^h$, per ogni $j \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}$ e per ogni $h \geq 1$, $h \in \mathbb{Z}$; ciò implica che $\lim_{h\to+\infty} x(\bar{t}_h) = p$.
Per mostrare che $\omega(\gamma)$ *è invariante*, si consideri uno stato $\hat{x}_0 \in \omega(\gamma)$; per definizione, esiste una successione di tempi $\{t_k\}$ tale che $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ e $\lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k, x_0) = \hat{x}_0$. Per provare il lemma occorre mostrare che, $\forall \bar{t} \geq 0$, anche $\varphi(\bar{t}, \hat{x}_0)$ è punto limite di γ, ovvero che, fissato $\bar{t} > 0$, esiste una successione $\{\tau_k\}$ tale che $\lim_{k\to+\infty} \tau_k = +\infty$ e $\lim_{k\to+\infty} \varphi(\tau_k, x_0) = \varphi(\bar{t}, \hat{x}_0)$. Si noti ora che, fissato $\bar{t} \in (0, +\infty)$, la funzione $\varphi(t, x)$ con $t \in [0, \bar{t}]$ è continua rispetto a x (ciò discende banalmente dalla continuità di $f(\cdot)$ nel caso a tempo discreto; per il caso a tempo continuo si sfrutta la derivabilità di $f(\cdot)$, si vedano [25, 35]). Ricordando che $\varphi(t, \varphi(t_k, x_0)) = \varphi(t + t_k, x_0)$, e sfruttando la continuità della funzione $\varphi(t, x)$ rispetto a x, si ha che

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi(\bar{t} + t_k, x_0) = \lim_{k\to+\infty} \varphi(\bar{t}, \varphi(t_k, x_0)) = \varphi\left(\bar{t}, \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k, x_0)\right) = \varphi\left(\bar{t}, \hat{x}_0\right),$$

e quindi $\{\tau_k\} = \{\bar{t} + t_k\}$ è la successione di tempi che mostra che, se $\hat{x}_0 \in \omega(\gamma)$, allora anche $\varphi(\bar{t}, \hat{x}_0) \in \omega(\gamma)$, per ogni $\bar{t} > 0$ (ovvero, che $\omega(\gamma)$ è invariante). $\square$

Si indichi con la notazione $\mathrm{dist}_{\mathcal{V}}(x) \triangleq \inf_{v\in\mathcal{V}} \|x - v\|$ la distanza del punto x dall'insieme $\mathcal{V}$.

Lemma W.4.5.2. *Sia* γ *la traiettoria corrispondente al moto del sistema* (4.1.3) *associato allo stato iniziale* x_0*, e sia* $f(\cdot) \in \mathcal{C}^1$ *[*$f(\cdot) \in \mathcal{C}^0$*]. Se* γ *è limitata allora l'insieme limite* $\omega(\gamma)$ *è compatto, non vuoto, e*

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{dist}_{\omega(\gamma)}(\varphi(t, x_0)) = 0.$$

Dimostrazione. [$\omega(\gamma)$ *è compatto*] Essendo la traiettoria γ limitata per ipotesi, anche $\omega(\gamma)$ è limitato; poiché inoltre dal Lemma W.4.5.1 si sa che $\omega(\gamma)$ è anche chiuso, ne consegue che $\omega(\gamma)$ è compatto.
[$\omega(\gamma)$ *è non vuoto*] Sia $\{t_k\}$ una successione di tempi tale che $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$. Essendo γ limitata, esiste $r > 0$ tale che $\gamma \subset \mathcal{B}_r(0)$. Si ricordi che da ogni successione contenuta in un insieme compatto è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un elemento dello stesso insieme compatto [35]. La successione di stati $\{\varphi(t_k, x_0)\} \subset \bar{\mathcal{B}}_r(0)$ assume valori nell'insieme compatto $\bar{\mathcal{B}}_r(0)$, e quindi contiene una sottosuccessione $\{\varphi(\tau_k, x_0)\}$ (corrispondente

ad una sottosuccessione $\{\tau_k\}$ della successione $\{t_k\}$, con $\lim_{k\to+\infty}\tau_k = +\infty$) convergente ad un qualche punto $p \in \bar{\mathcal{B}}_r(0)$. Ma allora p e la successione $\{\tau_k\}$ soddisfano la definizione di punto limite, e quindi $p \in \omega(\gamma) \neq \emptyset$.
[*La distanza di* $\varphi(t, x_0)$ *da* $\omega(\gamma)$ *tende a zero per* $t \to +\infty$] Si supponga per assurdo che non sia $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{dist}_{\omega(\gamma)}(\varphi(t, x_0)) = 0$; sotto tale ipotesi si avrebbe che esistono $\varepsilon > 0$ e una successione $\{t_k\}$ tali che $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ e inoltre

$$\mathrm{dist}_{\omega(\gamma)}(\varphi(t_k, x_0)) \geq \varepsilon, \quad \forall k \geq 0$$

(in quanto altrimenti per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbero un $\bar{k}$ e un $t_{\bar{k}}$ tali che $\mathrm{dist}_{\omega(\gamma)}(\varphi(t, x_0)) < \varepsilon$, $\forall t \geq t_{\bar{k}}$, ovvero $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{dist}_{\omega(\gamma)}(\varphi(t, x_0)) = 0$). Tenendo conto che, per l'ipotesi di limitatezza di γ, esiste $r > 0$ tale che $\gamma \subset \mathcal{B}_r(0)$, si avrebbe quindi che $\{\varphi(t_k, x_0)\} \subset \mathcal{M}$, con $\mathcal{M} \triangleq \{x \in \bar{\mathcal{B}}_r(0) : \mathrm{dist}_{\omega(\gamma)}(x) \geq \varepsilon\}$. Ma essendo $\mathcal{M}$ compatto, ragionando come al punto precedente si avrebbe che esisterebbe una sottosuccessione $\{\tau_k\}$ di $\{t_k\}$, con $\lim_{k\to+\infty}\tau_k = +\infty$, tale che la sottosuccessione $\{\varphi(\tau_k, x_0)\}$ convergerebbe ad un qualche punto $p \in \mathcal{M}$, perciò tale che $p \in \omega(\gamma)$; ma questo contraddirebbe l'ipotesi assurda che $\mathrm{dist}_{\omega(\gamma)}(\varphi(t_k, x_0)) \geq \varepsilon$, $\forall k \geq 0$, e prova l'asserto. □

Dimostrazione (**del Teorema 4.5.5 a pag. 234**). Si dimostra solo il caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, essendo la prova del caso $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ analoga. In base al Teorema 4.5.1, x_e è stabile semplicemente. Si supponga (senza perdita di generalità, eventualmente per un valore di ρ minore di quello dell'enunciato) ρ tale che $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathcal{B}_\rho(x_e)$, $x \neq x_e$. Siano dunque $\varepsilon \in (0, \rho)$, $\delta \in (0, \varepsilon)$ tali che $x_0 \in \mathcal{B}_\delta(x_e) \implies \varphi(t, x_0) \in \mathcal{B}_\varepsilon(x_e)$, $\forall t \geq 0$. Per dimostrare l'attrattività, si mostrerà ora che per un qualunque stato $x_0 \in \mathcal{B}_\delta(x_e)$ si ha $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t, x_0) = x_e$. Sia γ la traiettoria descritta da $\varphi(t, x_0)$ per $t \in [0, +\infty)$. La traiettoria γ è limitata poiché $x_0 \in \mathcal{B}_\delta(x_e)$; pertanto, in base al Lemma W.4.5.2 il suo insieme limite $\omega(\gamma)$ è un insieme compatto e non vuoto contenuto in $\bar{\mathcal{B}}_\varepsilon(x_e)$. Dalle ipotesi sul segno di V e $\dot{V}$, si deduce che $V(\varphi(t, x_0))$ è una funzione monotona non crescente e limitata inferiormente, e quindi esiste finito $m = \lim_{t\to+\infty} V(\varphi(t, x_0)) \geq 0$. Dalla definizione di $\omega(\gamma)$, si ha che per ogni $p \in \omega(\gamma)$, esiste una successione $\{t_k\}$ tale che $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ e $\lim_{k\to+\infty} x(t_k) = p$. Per la continuità di V è possibile scambiare il limite dentro e fuori V ed ottenere

$$V(p) = V\left(\lim_{k\to+\infty} x(t_k)\right) = \lim_{k\to+\infty} V(x(t_k)) = m.$$

Per l'arbitrarietà di p, si ha che $V(x) = m$, per ogni $x \in \omega(\gamma)$. In base al Lemma W.4.5.1, $\omega(\gamma)$ è un insieme invariante, e quindi ogni moto con condizione iniziale in $\omega(\gamma)$ rimane in $\omega(\gamma)$ per sempre; in base a quanto ricavato, ogni tale moto si svolgerà a valore costante di V (pari a m) e quindi a $\dot{V} = 0$, e ciò implica che $\omega(\gamma) \subset \mathcal{N}$. Se $\omega(\gamma)$ contenesse uno stato $\hat{x} \neq x_e$, si avrebbe che la traiettoria corrispondente al moto $\varphi(\cdot, \hat{x})$ con origine in $\hat{x}$ sarebbe contenuta interamente nell'insieme invariante $\omega(\gamma)$, e quindi in $\mathcal{N}$, contraddicendo la terza ipotesi del teorema; se ne deduce quindi che, per ogni $x_0 \in \mathcal{B}_\delta(x_e)$, l'insieme limite è $\omega(\gamma) = \{x_e\}$; questo, grazie al Lemma W.4.5.2, implica che $\lim_{t \to +\infty} \|\varphi(t, x_0) - x_e\| = 0$; perciò x_e è attrattivo. $\square$

W.4.6 Complementi sull'analisi della stabilità mediante l'approssimazione lineare

Mediante il Teorema 4.5.3 è possibile dimostrare la parte b) del Teorema 4.6.1 a pag. 242.

Dimostrazione (della parte b) del Teorema 4.6.1). Si riporta la dimostrazione del solo caso a tempo continuo (quella del caso a tempo discreto è analoga). Senza perdita di generalità, si supponga $x_e = 0$ (ciò è sempre possibile, sostituendo nella (4.1.3) $x(t)$ con $x_e + \delta_x(t)$ e ridenominando poi $\delta_x(t)$ con $x(t)$ e $f(x_e + \delta_x(t))$ con $f(x(t))$). Definendo ancora $A \triangleq \nabla_x f(x_e) = \nabla_x f(0)$ e $h(\delta_x) \triangleq r_f(\delta_x, x_e)$, ovvero $h(x) \triangleq r_f(x, 0)$, per ipotesi A possiede almeno un autovalore a parte reale positiva. Si considerano due sottocasi: *i)* A non ha nessun autovalore a parte reale nulla; *ii)* A ha almeno un autovalore a parte reale nulla.
Caso i). Tramite un cambiamento di base nello spazio di stato $\hat{x} = Tx$, con T reale, è sempre possibile ottenere

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \tag{W.4.6.1}$$

con A_1 e A_2 matrici quadrate reali, e con la matrice A_1 avente solo autovalori a parte reale negativa e la matrice A_2 avente solo autovalori a parte reale positiva (cfr per esempio le (3.3.19), (3.3.21) se gli autovalori di A sono tutti reali; in caso contrario si può capire facilmente che un opportuno scambio tra le colonne a blocchi nella (3.3.61) dà luogo a una matrice T^{-1}tale che valga la (W.4.6.1)). Nelle nuove coordinate, il sistema assume la forma $\dot{\hat{x}} = T \cdot f(T^{-1}\hat{x}) \triangleq \hat{f}(\hat{x})$, e risulta $\nabla_{\hat{x}} \hat{f}(0) = T\nabla_x f(0)T^{-1} = TAT^{-1}$, come è facile verificare; perciò, partizionando i due membri di tale equazione coerentemente con la partizione del secondo membro della (W.4.6.1), si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{f}_1(\hat{x}) = A_1\hat{x}_1 + \hat{h}_1(\hat{x}), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{f}_2(\hat{x}) = A_2\hat{x}_2 + \hat{h}_2(\hat{x}), \end{aligned}$$

ove $\hat{x} = [\hat{x}_1' \;\; \hat{x}_2']'$, $\hat{f}(\hat{x}) = [\hat{f}_1'(\hat{x}) \;\; \hat{f}_2'(\hat{x})]'$, $\hat{h}(\hat{x}) \triangleq Th(T^{-1}\hat{x}) = [\hat{h}_1'(\hat{x}) \;\; \hat{h}_2'(\hat{x})]'$ e le funzioni $\hat{h}_1(\hat{x})$ e $\hat{h}_2(\hat{x})$ soddisfano le seguenti relazioni (simili alla (4.6.9)):

$$\forall \gamma > 0, \exists \rho = \rho(\gamma) > 0 : \left\| \hat{h}_1(\hat{x}) \right\| < \gamma^{-1} \|\hat{x}\|, \left\| \hat{h}_2(\hat{x}) \right\| < \gamma^{-1} \|\hat{x}\|, \forall \hat{x} \in \mathcal{B}_\rho, \hat{x} \neq 0. \tag{W.4.6.2}$$

Poiché $-A_2$ ha per autovalori gli opposti degli autovalori di A_2, in base al Teorema 4.5.6 a pag. 235 e al Teorema 4.5.7 a pag. 237, ognuna delle due equazioni di Lyapunov

$$A_1'P_1 + P_1A_1 = -I, \quad (-A_2)'P_2 + P_2(-A_2) = -I,$$

ammette un'unica soluzione simmetrica e definita positiva, P_1 e P_2, rispettivamente. Si definisca quindi $P = \begin{bmatrix} -P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ e si consideri la funzione $V(\hat{x}) = \hat{x}' P \hat{x}$, che permetterà di dimostrare l'instabilità di $\hat{x}_e = Tx_e = 0$ mediante il Teorema 4.5.3. Si considerino gli insiemi

$$\mathcal{A} \triangleq \{\hat{x} : V(\hat{x}) > 0\} = \{\hat{x} : \hat{x}_2' P_2 \hat{x}_2 > \hat{x}_1' P_1 \hat{x}_1\}, \quad \mathcal{W} \triangleq \mathcal{B}_\rho,$$

con ρ scelto in base alla (W.4.6.2) per $\gamma = m \triangleq \max\{6\,\|P_1\|\,, 6\,\|P_2\|\}$, ove è $m > 0$ poiché $P_i = P_i' > 0$ implica $\|P_i\| \neq 0$, $i = 1, 2$ (come è facile verificare).

Si mostrerà ora che $\dot{V}(\hat{x}) > 0$ per $\hat{x} \in \mathcal{W}$, $\hat{x} \neq 0$. Infatti:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{x}) &= \hat{x}_1' \left(A_1'(-P_1) + (-P_1)A_1\right) \hat{x}_1 + 2\hat{x}_1'(-P_1)\hat{h}_1(\hat{x}) + \\ &\quad + \hat{x}_2' \left(A_2' P_2 + P_2 A_2\right) \hat{x}_2 + 2\hat{x}_2' P_2 \hat{h}_2(\hat{x}) = \\ &= \|\hat{x}_1\|^2 + \|\hat{x}_2\|^2 + 2\hat{x}_1'(-P_1)\hat{h}_1(\hat{x}) + 2\hat{x}_2' P_2 \hat{h}_2(\hat{x}), \end{aligned}$$

ove per gli ultimi due termini per ogni $\hat{x} \in \mathcal{W}$, $\hat{x} \neq 0$ risulta (per la disuguaglianza di Schwartz [35], la (4.3.3) per $E_2 = \hat{h}_i(\hat{x})$, $i = 1, 2$, e la (W.4.6.2)):

$$\begin{aligned} \left|2\hat{x}_1'(-P_1)\hat{h}_1(\hat{x})\right| &\leq 2\,\|\hat{x}_1\|\,\|P_1\|\,\left\|\hat{h}_1(\hat{x})\right\| < \frac{2\,\|\hat{x}_1\|\,\|P_1\|\,\|\hat{x}\|}{m} \leq \frac{1}{3}\,\|\hat{x}_1\|\,\|\hat{x}\|\,, \\ \left|2\hat{x}_2' P_2 \hat{h}_2(\hat{x})\right| &\leq 2\,\|\hat{x}_2\|\,\|P_2\|\,\left\|\hat{h}_2(\hat{x})\right\| < \frac{2\,\|\hat{x}_2\|\,\|P_2\|\,\|\hat{x}\|}{m} \leq \frac{1}{3}\,\|\hat{x}_2\|\,\|\hat{x}\|\,. \end{aligned}$$

Pertanto dalle relazioni precedenti si ha:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{x}) &= \|\hat{x}_1\|^2 + \|\hat{x}_2\|^2 + 2\hat{x}_1'(-P_1)\hat{h}_1(\hat{x}) + 2\hat{x}_2' P_2 \hat{h}_2(\hat{x}) > \\ &> \|\hat{x}\|^2 - \frac{1}{3}\,\|\hat{x}_1\|\,\|\hat{x}\| - \frac{1}{3}\,\|\hat{x}_2\|\,\|\hat{x}\| \geq \frac{1}{3}\,\|\hat{x}\|^2\,, \quad \forall \hat{x} \in \mathcal{W},\ \hat{x} \neq 0. \end{aligned}$$

Le ipotesi del Teorema 4.5.3 sono quindi verificate, in quanto l'origine appartiene alla frontiera di $\mathcal{A}$ (luogo dei punti $\hat{x} = [\hat{x}_1'\ \hat{x}_2']'$ tali che $\hat{x}_2' P_2 \hat{x}_2 = \hat{x}_1' P_1 \hat{x}_1$, eguaglianza che implica che anche $[\alpha\hat{x}_1'\ \alpha\hat{x}_2']'$, per ogni α reale, appartiene alla frontiera di $\mathcal{A}$), e quindi è punto di accumulazione degli stati ove $V(\hat{x}) > 0$, e $\dot{V}(\hat{x}) > 0$, per ogni $\hat{x} \in \mathcal{W}$, $\hat{x} \neq 0$; quindi si può dedurre che lo stato di equilibrio è instabile per il sistema nonlineare considerato.

Caso ii). Se A possiede uno o più autovalori a parte reale nulla, esiste un valore $\bar{\delta} > 0$ tale che per ogni $\delta \in (0, \bar{\delta})$ si ha che $\tilde{A} \triangleq A - \delta I$ (i cui autovalori $\tilde{\lambda}_i$ sono ottenuti da quelli λ_i di A con la relazione $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - \delta$) ha esattamente lo stesso numero di autovalori a parte reale positiva di A (contando ciascuno con la relativa molteplicità algebrica), e nessun autovalore a parte reale nulla (il valore esatto di δ verrà scelto nell'ultima parte di questa prova). Analogamente a quanto fatto nel caso i), si può effettuare un cambiamento di base nello spazio di stato che porta la $\tilde{A}$ in forma diagonale a blocchi, con blocchi diagonali $\tilde{A}_1$ e $\tilde{A}_2$ tali che $\tilde{A}_1$ ha solo autovalori a parte reale negativa e $\tilde{A}_2$ ha solo autovalori a parte reale positiva, con $\tilde{A}$, $\tilde{A}_1$ e $\tilde{A}_2$ che soddisfano la relazione $T\tilde{A}T^{-1} = \mathrm{diag}\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ (simile alla (W.4.6.1)), e con il sistema che, definendo anche in questo caso $\hat{x} = Tx$, assume la forma $\dot{\hat{x}} = T \cdot f(T^{-1}\hat{x}) \triangleq \hat{f}(\hat{x})$, risultando così $\nabla_{\hat{x}}\hat{f}(0) = T\nabla_x f(0)T^{-1} = TAT^{-1} = T(\tilde{A} + \delta I)T^{-1} = T\tilde{A}T^{-1} + \delta I$. Si possono allora determinare due matrici simmetriche e definite positive P_1 e P_2 risolvendo le seguenti equazioni matriciali di Lyapunov

$$\tilde{A}_1' P_1 + P_1\tilde{A}_1 = -I, \qquad (-\tilde{A}_2)' P_2 + P_2(-\tilde{A}_2) = -I.$$

Nella nuova base il sistema studiato sarà descritto nel modo seguente (usando notazioni simili a quelle usate nel caso i)):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{f}_1(\hat{x}) = \tilde{A}_1\hat{x}_1 + \delta\hat{x}_1 + \hat{h}_1(\hat{x}), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{f}_2(\hat{x}) = \tilde{A}_2\hat{x}_2 + \delta\hat{x}_2 + \hat{h}_2(\hat{x}). \end{aligned}$$

Si adotti la stessa scelta di $V(\hat{x})$ e degli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{W}$ che nel caso i), con ρ scelto anch'esso allo stesso modo, con le stesse conseguenze per $\hat{x}_e = 0$ e $V(\hat{x})$; poiché inoltre per $\hat{x} \in \mathcal{W} = \mathcal{B}_\rho$, $\hat{x} \neq 0$, per la disuguaglianza di Schwartz [35] e per la (4.3.3) per $E_2 = \hat{h}_i(\hat{x})$, $i = 1, 2$, si ha che

$$|2\delta V(\hat{x})| = 2\delta \left|\hat{x}' P\hat{x}\right| \leq 2\delta \left\|\hat{x}\right\| \left\|P\hat{x}\right\| \leq 2\delta \left\|\hat{x}\right\| \left\|P\right\| \left\|\hat{x}\right\|,$$

e poiché, essendo $P_i = P_i' > 0$, $i = 1, 2$, risulta $\|P\| \neq 0$ (come è facile verificare), si può fissare un valore di $\delta \in (0, \bar{\delta})$ che sia minore o uguale a $\frac{1}{12\|P\|}$, in modo tale che valga la relazione $|2\delta V(\hat{x})| \leq \dfrac{1}{6}\left\|\hat{x}\right\|^2$ per ogni $\hat{x} \in \mathcal{W}$, $\hat{x} \neq 0$. Si avrà $\dot{V}(\hat{x}) > 0$ per $\hat{x} \in \mathcal{W}$, $\hat{x} \neq 0$, in quanto:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{x}) = \hat{x}_1' &\left(\tilde{A}_1'(-P_1) + (-P_1)\tilde{A}_1\right)\hat{x}_1 - 2\delta\hat{x}_1' P_1\hat{x}_1 + 2\hat{x}_1'(-P_1)\hat{h}_1(\hat{x}) + \\ &+ \hat{x}_2'\left(\tilde{A}_2' P_2 + P_2\tilde{A}_2\right)\hat{x}_2 + 2\delta\hat{x}_2' P_2\hat{x}_2 + 2\hat{x}_2' P_2\hat{h}_2(\hat{x}) \geq \\ &\geq \left\|\hat{x}_1\right\|^2 - 2\left\|P_1\right\|\left\|\hat{x}_1\right\|\left\|\hat{h}_1(\hat{x})\right\| + \left\|\hat{x}_2\right\|^2 - 2\left\|P_2\right\|\left\|\hat{x}_2\right\|\left\|\hat{h}_2(\hat{x})\right\| + 2\delta V(\hat{x}) > \\ &> \left\|\hat{x}\right\|^2 - \frac{1}{3}\left\|\hat{x}_1\right\|\left\|\hat{x}\right\| - \frac{1}{3}\left\|\hat{x}_2\right\|\left\|\hat{x}\right\| - \frac{1}{6}\left\|\hat{x}\right\|^2 \geq \frac{1}{6}\left\|\hat{x}\right\|^2, \end{aligned}$$

e l'instabilità dello stato di equilibrio discende dal Teorema 4.5.3, le cui ipotesi risultano tutte soddisfatte. □

W.4.7 Complementi sulla stabilità esterna dei sistemi lineari

La dimostrazione del Teorema 4.7.1 per il caso $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ è simile a quella del caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, a patto:

1. di applicare il criterio del rapporto e il criterio del confronto per dimostrare la convergenza della serie il cui termine generico sia uno degli addendi in cui si può scomporre un singolo elemento di $W(k)$, allo scopo di dimostrare che la (4.7.4c) implica la (4.7.4a) riscritta per ogni singolo elemento di $W(k)$;

2. di far uso del Lemma W.4.3.1 per dimostrare per assurdo che la stabilità esterna implica la (4.7.4c), quando si considerino poli di $\boldsymbol{W}(z)$ non reali.