

3. MISURE DI SPOSTAMENTO

3.1 IL TRASDUTTORE PIEZOELETTRICO DI SPOSTAMENTO

Questo tipo di trasduttore sfrutta la proprietà dei *materiali piezoelettrici* di generare cariche elettriche, Q , proporzionali alla deformazione causata dallo spostamento, che si vuole misurare¹:

$$Q = k_q \cdot x_i$$

con k_q è il coefficiente di piezoelettricità e x_i lo spostamento. Questi trasduttori vengono normalmente utilizzati per risalire alla forza, o alla pressione, origine dello spostamento in questione. In caso di spostamenti costanti, o lentamente variabili questi trasduttori non riescono a garantire una relazione lineare perfetta fra carica e spostamento, come verrà accennato in seguito, per cui in questi casi è opportuno ricorrere ad altri tipi di trasduttori.

Il trasduttore piezoelettrico, per la piccola energia in gioco, deve essere collegato ad un amplificatore di carica² (vedi fig. 3.1a), che possiede un'alta impedenza di ingresso, dell'ordine di $10^{14} \Omega$, per impedire che la carica venga dissipata nella misura.

Per studiare il comportamento di questo *sistema meccanico-elettrico*, si considera il caso di uno spostamento, x_i , generato da una forza, che ha il seguente andamento:

$$\begin{aligned} F &= 0, && \text{per } t < 0 \\ F &= F_i, && \text{per } 0 < t < T \\ F &= 0, && \text{per } t > T \end{aligned}$$

descritto nella figura 3.1b.

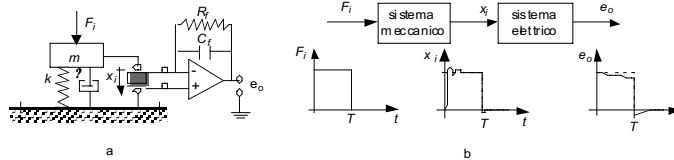


Figura 3.1. Schematizzazione del trasduttore di spostamento (a) e andamento delle tensioni all'uscita dai vari blocchi in caso di spostamento a gradino (b).

Il sistema può essere scomposto in due sotto sistemi: uno meccanico del secondo ordine, che trasforma la forza, F_i , in uno schiacciamento, x_i , del trasduttore piezoelettrico, e l'altro elettrico del primo ordine, che traduce questo schiacciamento in una tensione, e_o .

Se si trascura il transitorio introdotto dal sistema meccanico³, si ha:

$$x_i(t) = k \cdot F(t)$$

e, di conseguenza, l'andamento temporale della tensione, $e_o(t)$, è legato solo alla dinamica dell'amplificatore di carica, il cui schema è presentato nella figura 3.2.

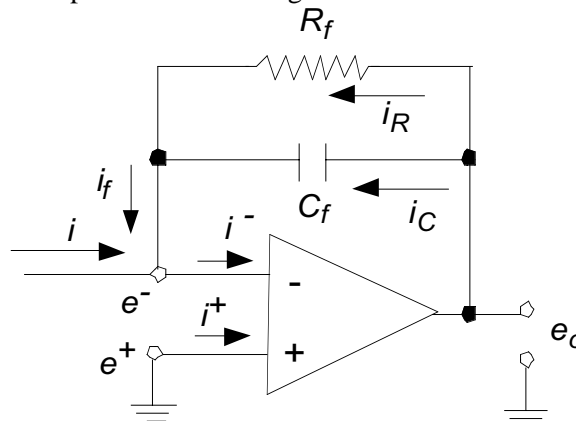


Figura 3.2. Schema dell'amplificatore di carica.

¹ Vedi il paragrafo *Il trasduttore piezoelettrico* nel Capitolo *Note su alcuni componenti elettronici*.

² Vedi il paragrafo *L'amplificatore di carica* nel Capitolo *Sistemi di condizionamento del segnale*.

³ Nella figura 9.40b il transitorio meccanico è stato amplificato, rispetto al comportamento reale.

Da quanto spiegato nel paragrafo sull'Amplificatore di carica esposto nel testo, la corrente, $i(t) = dQ(t)/dt$, in ingresso è quella proveniente dal trasduttore, per cui:

$$i(t) = k_q \cdot \frac{dx_i(t)}{dt}$$

Per il principio di Kirchoff sulle correnti, che convergono nel nodo⁴, si ha:

$$i(t) = -i_f(t)$$

perché si considerano nulle le correnti i^+ e i^- . La corrente, $i_f(t)$, proveniente dal parallelo resistivo-capacitivo, è data dalla somma di quella proveniente dalla resistenza R_f e di quella proveniente dalla capacità C_f :

$$i_f(t) = i_R(t) + i_C(t) \tag{3.1}$$

Considerando il condensatore scarico al tempo $t = 0$, e che $e^+ = e^- = 0$, si ha:

$$e_o(t) = \frac{1}{C_f} \int_0^t i_c(t') dt' + 0$$

La corrente $i_c(t)$ si ottiene derivando l'espressione precedente:

$$\frac{de_o(t)}{dt} = \frac{i_c(t)}{C_f}$$

per cui la (3.1) assume la forma:

$$\frac{e_o(t)}{R_f} + C_f \cdot \frac{de_o(t)}{dt} = -k_q \frac{dx_i(t)}{dt}$$

$$\tau_f \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = -\frac{k_q}{C_f} \tau_f \frac{dx_i(t)}{dt}$$

con $\tau = R_f \cdot C_f$, costante di tempo.

Durante il tempo compreso fra $t = 0$ e $t = T$ lo spostamento $x(t)$ è costante per cui:

$$\tau_f \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = 0,$$

e, di conseguenza:

$$e_o(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau_f}}$$

Per $t = 0^+$ la condizione al contorno impone che:

$$e_o(t = 0) = \frac{Q}{C_a} = \frac{k_q \cdot x_i}{C_a}$$

in cui C_a è la capacità del sensore piezoelettrico. L'andamento della tensione $e_o(t)$ nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq T$ è, di conseguenza:

$$e_o(t) = \frac{k_q \cdot x_i}{C_a} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_f}} \tag{3.2}$$

Al tempo $t = T^+$ la forza, F_i , torna a zero e, così, anche lo schiacciamento, x_i , generando sulle piastre una carica Q uguale e contraria a quella indotta dallo schiacciamento e la tensione, e_o , si abbassa di una quantità pari a $k_q \cdot x_i / C_a$, come è mostrato nella figura seguente.

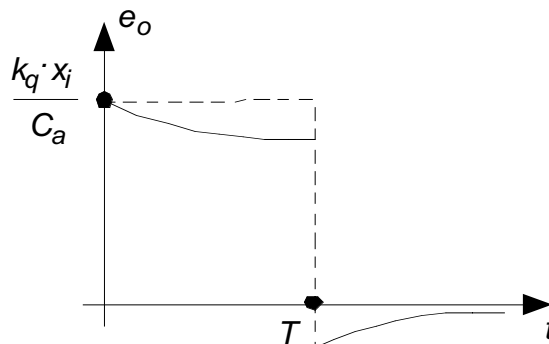


Figura 3.3. Andamento della tensione in uscita dall'amplificatore di carica in seguito ad uno schiacciamento costante del sensore piezoelettrico, seguito da un rilascio.

⁴ Vedi il paragrafo Richiami di elettrotecnica nel Capitolo Termodinamica dei fluidi ed elettrotecnica.

Per $t > T^+$ la tensione in uscita dall'amplificatore segue la legge:

$$\tau_f \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = 0$$

la cui soluzione è:

$$e_o(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau_f}} \tag{3.3}$$

La condizione al contorno è data dall'eguaglianza della (3.2), cui è stato sottratto il valore $k_q \cdot x_i / C_a$ con la (3.3), valutate al tempo $t = T$:

$$C_1 \cdot e^{-\frac{T}{\tau_f}} = \frac{k_q \cdot x_i}{C_a} \cdot e^{-\frac{T}{\tau_f}} - \frac{k_q \cdot x_i}{C_a}$$

da cui si ottiene la costante:

$$C_1 = \frac{k_q \cdot x_i}{C_a} \cdot \left[1 - e^{-\frac{T}{\tau_f}} \right]$$

La (3.3) diventa:

$$e_o(t) = \frac{k_q \cdot x_i}{C_a} \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_f}} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_f}}$$

L'andamento della tensione è mostrato nella figura 3.4 per diversi valori della costante di tempo τ_f .

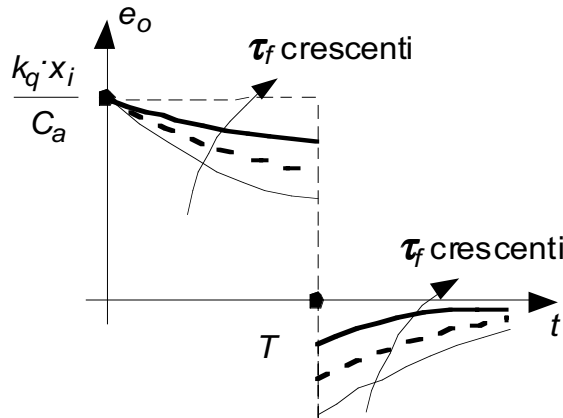


Figura 3.4. Andamento della tensione al variare della costante di tempo τ_f .

Si nota che all'aumentare del valore della costante di tempo la tensione tende ad avvicinarsi ad un valore costante all'interno del tempo T . Si deduce, quindi, che più τ_f è alto, più la misura di uno spostamento costante è accurata. Se si vuole mantenere il valore di $e_o(t)$ al tempo $t = T$ pari al 5% del valore iniziale, occorre che la costante di tempo τ soddisfi alla seguente condizione:

$$K \cdot e^{-\frac{T}{\tau_f}} = 0.95 \cdot K$$

da cui:

$$e^{\frac{T}{\tau_f}} = 1.05, \quad \tau_f = 20 \cdot T$$

3.2. GLI ESTENSIMETRI A RESISTENZA VARIABILE

Quando si deve verificare lo sforzo, cui è soggetta una struttura sotto carico, si può misurarne la deformazione conseguente e risalire al valore numerico dello sforzo ricorrendo alle equazioni, che legano le tensioni alle deformazioni. Ad esempio, se si conosce la direzione della sollecitazione, la deformazione, $\varepsilon = \Delta L / L$, è legata alla tensione σ , che si esercita nella stessa direzione di ΔL , dalla equazione

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

in cui L è la lunghezza della parte in esame, ΔL è la sua variazione di lunghezza ed E è il modulo di elasticità. Espressioni più complesse devono essere utilizzate, se non si conosce *a priori* la direzione della sollecitazione.

Nella pratica si impiega per le deformazioni una unità convenzionale: la *microdeformazione*, che vale

$$1 \mu def = 10^{-6}$$

Una deformazione pari a $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ equivale a $\varepsilon = 300 \mu def$.

Se si conoscono le direzioni delle *tensioni principali*, occorre misurare le deformazioni, ε_1 ed ε_2 , nelle due direzioni e risalire alle tensioni tramite le seguenti espressioni:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1)$$

essendo ν il coefficiente di contrazione trasversale, o di Poisson.

Se non si conosce nulla sulla direzione delle tensioni, allora occorre determinare le deformazioni ε_a , ε_b , ε_c in tre direzioni a , b , c , scelte *a priori*. Queste direzioni formano gli angoli φ_a , φ_b , φ_c con la direzione incognita della deformazione principale (vedi fig. 3.5).

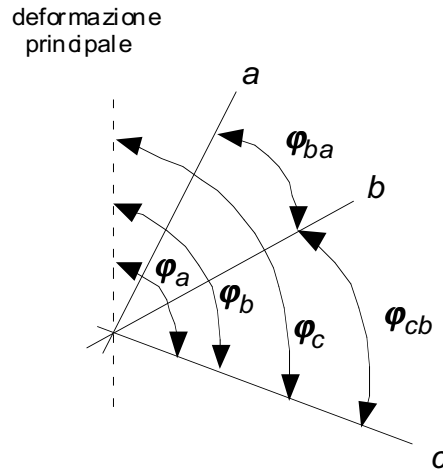


Figura 3.5. Relazioni angolari di tre direzioni delle deformazioni con la deformazione principale.

Gli angoli φ_{ba} e φ_{cb} sono scelti dallo sperimentatore, o sono già predisposti dalla posizione dei sensori utilizzati per la misura delle deformazioni, come vedrà mostrato in seguito. Si genera, così, un sistema di cinque equazioni nelle cinque incognite: ε_1 , ε_2 , φ_a , φ_b , φ_c :

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2 \cdot \varphi_a, & \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2 \cdot \varphi_b, \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2 \cdot \varphi_c, \\ \varphi_{ba} &= \varphi_b - \varphi_a, & \varphi_{cb} &= \varphi_c - \varphi_b \end{aligned}$$

in cui ε_1 ed ε_2 sono le tensioni nelle direzioni principali.

Le deformazioni sono misurate da sensori chiamati *estensimetri a resistenza variabile*, o *strain gages*, costituiti da conduttori metallici, o da semiconduttori. Il principio di funzionamento di questi sensori si basa sulla loro variazione di resistenza elettrica, quando questi sono soggetti a deformazione. Se si fa aderire *rigidamente* l'estensimetro al pezzo, soggetto ad una forza, o ad un momento, l'estensimetro rileva la presenza delle *tensioni superficiali*. Si tratta di misure non distruttive, cioè di misure che non richiedono il danneggiamento del pezzo, su cui è montato l'estensimetro.

Di seguito è presentato il principio di funzionamento dell'estensimetro. Un conduttore metallico, o un semiconduttore, di sezione A e di lunghezza L , oppone alla corrente elettrica una resistenza R , pari a:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} \tag{3.4}$$

in cui ρ è la *resistività*, misurata in ohm m [Ω m] (l'inverso della resistività è chiamata *conduttanza*, indicata con il simbolo σ , misurata in siemens [S]).

Se il conduttore subisce un allungamento, o una compressione, la sua resistenza cambia a causa della variazione, sia della sezione e della lunghezza, sia di una proprietà fondamentale dei materiali, chiamata *piezoresistività*; questa proprietà mette in luce la dipendenza della resistività, ρ , dalla deformazione del conduttore. La variazione della resistenza, in funzione della variazione dei suoi parametri [vedi (3.4)], può essere ottenuta, differenziando il logaritmo della resistenza, funzione della resistività, della lunghezza e dell'area dell'estensimetro:

$$\log R = \log \rho + \log L - \log A$$

Sapendo che:

$$d \log x = \frac{dx}{x}$$

si ottiene:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{dA}{A} \quad (3.5)$$

La superficie del conduttore può essere espressa dalla relazione

$$A = (k \cdot r) \cdot r$$

in cui k è uguale a π per una sezione circolare; per un conduttore di sezione rettangolare il prodotto $(k \cdot r)$ è uguale alla dimensione del primo lato, mentre il secondo lato è uguale ad r . Con questa posizione si ha

$$\frac{dA}{A} = 2 \cdot \frac{dr}{r}$$

La variazione dr è legata alla variazione dL dalla espressione:

$$\frac{dr}{r} = -\nu \frac{dL}{L}$$

in cui ν è il coefficiente di Poisson, per cui la (3.5) si trasforma nella

$$\frac{dR}{R} = \frac{dL}{L} + 2 \cdot \nu \cdot \frac{dL}{L} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.6a)$$

Portando a fattore comune $\frac{dL}{L} = \varepsilon$, si ottiene:

$$\frac{dR}{R} = K \cdot \varepsilon \quad (3.6b)$$

in cui

$$K = 1 + 2 \cdot \nu + \pi_1 \cdot E, \quad \pi_1 \cdot E = \frac{d\rho}{\rho} \cdot \frac{L}{dL} \quad (3.7)$$

Il coefficiente K è chiamato *fattore di estensimetro*, π_1 è il *coefficiente di piezoresistenza* ed E è il *modulo di elasticità* del conduttore, o del semiconduttore. Il termine $\pi_1 \cdot E$ non è molto grande per i metalli (come verrà esposto nel paragrafo successivo), mentre può raggiungere valori elevati, anche attorno a ≈ 200 , per i semiconduttori.

La (3.6b) mostra la relazione, che lega la variazione di resistenza alla deformazione; per potere, quindi, misurare l'entità della deformazione, occorre misurare la variazione di resistenza, ΔR , ricorrendo al ponte di Wheatstone, come verrà illustrato in seguito.

ESTENSIMETRI METALLICI

I materiali usati per questi estensimetri sono costituiti da leghe, alcune delle quali sono elencate nella tabella seguente, insieme alle loro caratteristiche. Si può osservare come il fattore di estensimetro oscilla tra 2 e 6.

I materiali più utilizzati sono leghe di rame-nichel (*constantana*), di nichel-cromo (*nicromo*) e di rame-manganese-nichel (*manganina*), con un fattore di estensimetro pari a circa 2.

Tabella 3.1

| materiale | Composizione, % | Fattore di estensimetro | Resistività, ρ $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ |
|-----------------|------------------|-------------------------|---|
| Constantana | Cu60, Ni40 | 2.0 | 0.48 |
| Nichromo | Ni80, Cr20 | 2.0 | 1.3 |
| Manganina | Cu84, Mn12, Ni4 | 2,2 | 0.43 |
| Chromel | Ni65, Fe25, Cr10 | 2.5 | 0.90 |
| Platino | Pt100 | 5.1 | 0.10 |
| Platino-Irridio | Pt80, Ir20 | 6.0 | 0.36 |
| Platino-Rodio | Pt90, Rh10 | 4.8 | 0.23 |

Le massime temperature di operazione degli estensimetri più utilizzati sono elencate nella tabella 3.2.

Tabella 3.2

| Materiale | Temperatura massima, °C |
|-----------------|-------------------------|
| Constantana | 400 |
| Chromel | 800 |
| Nichromo | 1000 |
| Platino | 1300 |
| Platino-Irridio | 1300 |

Gli estensimetri metallici possono essere utilizzati:

- a. sotto forma di *fili metallici non vincolati (unbonded strain gage)* e possono avere diametri di circa 30 μm ; questo tipo di estensimetro viene impiegato come trasduttore di vibrazioni, presentato nel Capitolo *Misure di vibrazioni*,
- b. sotto forma di *film sottili* (vedi fig. 3.6a) dello spessore di circa 3÷5 μm , depositati su un sottile strato di resine di polyamide o di fenoli vetrosi dello spessore di alcuni μm ; questi estensimetri, detti *estensimetri vincolati (bonded strain gage)*, vengono incollati fortemente sul pezzo di cui si vuole misurare la deformazione e non sono più recuperabili.

L'incollaggio di *film sottili* sul pezzo è una operazione delicata, che richiede molta esperienza; dal risultato di questa operazione dipende, infatti, il successo della misura. Si parte con il rendere leggermente ruvida la superficie su cui si posiziona l'estensimetro e successivamente la si pulisce con appropriati solventi. Si mette, poi, un sottile strato di collante e si posiziona l'estensimetro, premendolo forte per farlo aderire strettamente al pezzo. È evidente che lo spessore di collante deve essere il minimo possibile, in modo che l'estensimetro sia soggetto alla stessa deformazione superficiale del pezzo. Dopo avere saldato i connettori ai terminali dell'estensimetro, si copre la superficie dell'estensimetro con uno strato di vernice per proteggerlo dall'umidità, che potrebbe alterarne le caratteristiche.

La figura 3.6a mostra un estensimetro utilizzato per la misura di sforzi longitudinali. Si possono notare due caratteristiche singolari: la prima relativa all'andamento ripiegato a *U* del percorso dell'estensimetro e la seconda all'ingrossamento che subisce la sezione dell'estensimetro quando il percorso cambia direzione.

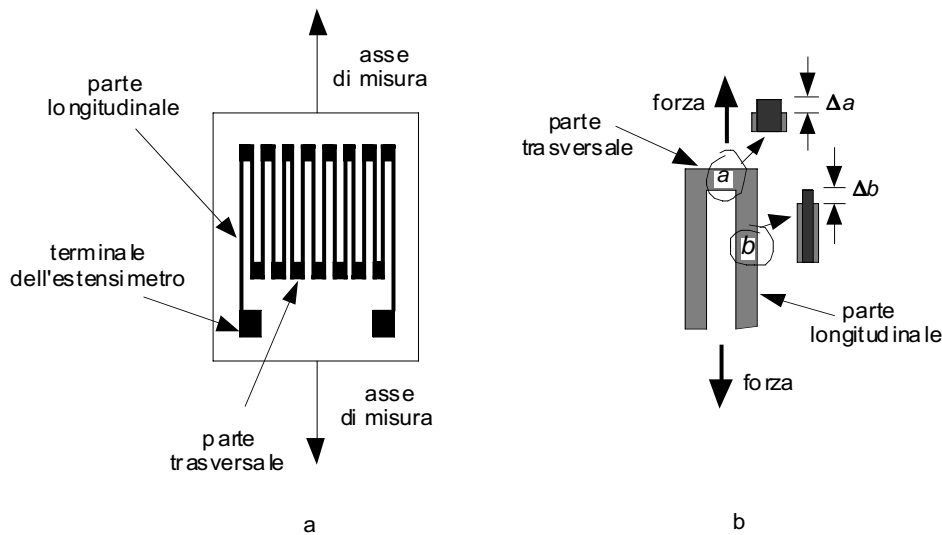


Figura 3.6. Estensimetro a film sottile (a) e particolare del cambio di direzione (b).

Poiché l'estensimetro è utilizzato per la misura di tensioni superficiali *locali*, ne consegue che la sua dimensione deve essere la più piccola possibile. Questa condizione contrasta con la necessità di avere, per una buona misura, grandi variazioni di resistenza, ΔR , proporzionali al valore, R (a parità di deformazione, ϵ), come è mostrato dalla (3.6b). Per avere grandi valori di R occorrerebbero estensimetri lunghi di piccola sezione. Sulla riduzione della sezione si è raggiunto ormai un limite inferiore con i film sottili, mentre sull'aumento della lunghezza si raggiunge l'obiettivo, ripiegando il percorso dell'estensimetro per farlo rimanere in vicinanza del punto di misura, come è mostrato nella figura 3.6a. L'ingrossamento della parte trasversale dell'estensimetro di figura 3.6a è dovuto all'esigenza di diminuire l'influenza di variazioni di resistenza nel tratto trasversale in seguito alla sua deformazione, legata al modulo di Poisson. Infatti, quando, ad esempio, l'estensimetro si allunga, in seguito ad una forza esercitata sul pezzo su cui è incollato, la parte longitudinale, parallela alla direzione della forza (zona *b* della fig. 3.6b) si allunga e si restringe, aumentando la sua resistenza, mentre la parte trasversale (parte *a* della fig. 3.6b) si accorcia e allarga la sua sezione, diminuendo, così, la sua resistenza; il contrario avviene, quando il pezzo è soggetto a compressione. Per ridurre l'influenza di questo effetto secondario sulla variazione di resistenza si ingrandisce la sezione trasversale, in modo da diminuire il suo contributo alla resistenza totale.

Nelle figure successive sono mostrati alcuni tipi di estensimetri, chiamati *rosette*, per la misura di deformazioni in due o tre direzioni.

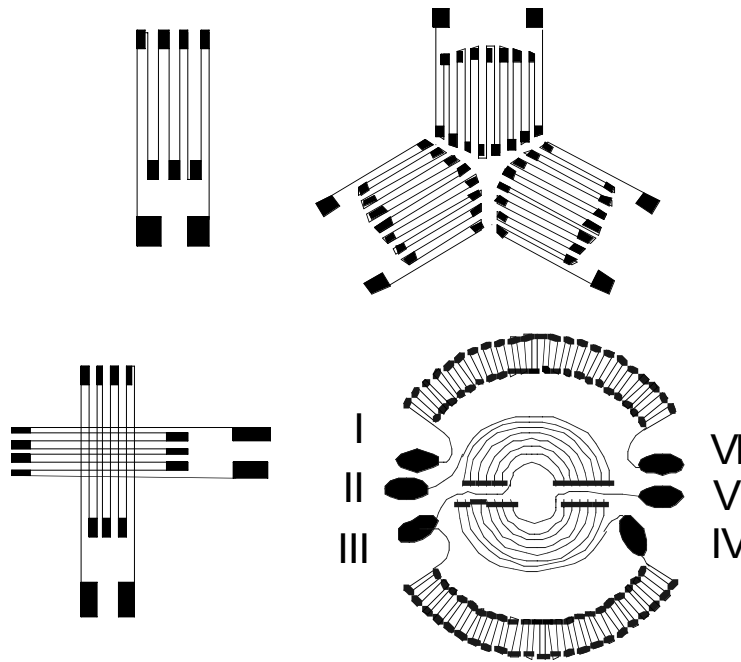


Figura 3.7. Varie configurazioni di estensimetri.

Le dimensioni longitudinali degli estensimetri vanno dal millimetro a qualche centimetro e la loro resistenza, R , varia tra circa 5Ω a circa 1200Ω .

Gli estensimetri sono normalmente utilizzati per misurare deformazioni longitudinali, che possono essere al massimo dell'ordine di $2 \div 3 \text{ mm/m}$. Per un estensimetro medio, cioè con un fattore di estensimetro attorno a $2 \div 3$, le variazioni di resistenza sono dell'ordine $5 \div 7 \text{ m } \Omega/\Omega$.

ESTENSIMETRI A SEMICONDUCTORE

Come i conduttori così anche i semiconduttori⁵, come ad esempio, *Si*, *Ge*, *In-Sb*, *In-P*, *Ga-As* e *Ga-Sb* cambiano la loro resistenza, se sono sottoposti a deformazione. Tra questi semiconduttori il più utilizzato è decisamente il *Si*, a causa della sua inerzia chimica e della tecnologia ampiamente sviluppata, a suo riguardo, nel mondo industriale.

Nei semiconduttori il termine $\pi_l E$, che compare nel fattore di estensimetro, è molto più grande del termine $(1+2 \nu)$ [vedi (3.7)], per cui risulta predominante e può raggiungere valori fino a 200. Il valore dipende dal tipo di semiconduttore e dal tipo di drogaggio (*n* o *p*), dalla concentrazione del drogaggio stesso (che influenza la resistività), dalla temperatura⁶ e dal piano di taglio del cristallo, da cui è ricavato. Nella figura seguente è mostrato l'andamento del fattore di estensimetro, K , del *Silicio* in funzione della resistività, ρ_o ⁷ (alla temperatura ambiente) per alcune direzioni del piano di taglio del cristallo (tra parentesi quadre sono indicati gli indici di Miller⁸ che definiscono la direzione del piano di taglio).

⁵ Vedi il paragrafo *I semiconduttori* nel Capitolo *Note su alcuni componenti elettronici*.

⁶ In modo più marcato rispetto agli estensimetri metallici.

⁷ La resistività dipende dalla concentrazione del drogaggio.

⁸ In un cristallo cubico, come è ad esempio quello del Silicio, la direzione cristallografica è definita dalla perpendicolare al piano che si sta considerando, identificata dagli stessi numeri che identificano il piano, cioè le intercette di grandezza unitaria sugli assi cartesiani di riferimento (indici di Miller).

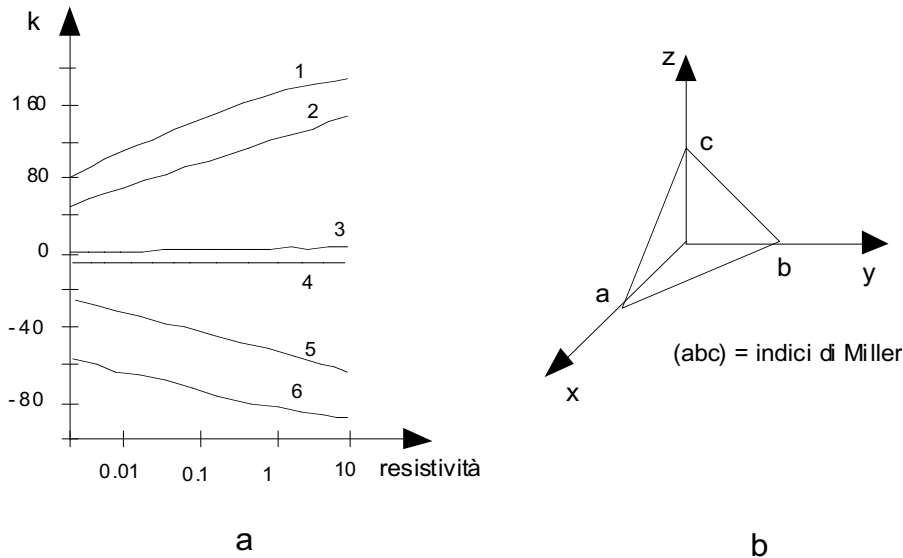


Figura 3.8. Fattore di estensimetro, k , in funzione della resistività, ρ_o , del Silicio; 1. Si-p[111], 2. Si-p[110], 3. Si-p[100]; 4. Si-n[111], 5. Si-n[110], 6. Si-n[100].

Si può notare come il taglio del cristallo influenza notevolmente il coefficiente di estensimetro, passando da valori bassi fino a raggiungere valori attorno a 200. I semiconduttori drogati con *elementi donatori* (Si-n) hanno un coefficiente negativo, al contrario di quelli drogati con *elementi accettori* (Si-p)⁹. Il grafico evidenzia la dipendenza del coefficiente di estensimetro dalla concentrazione degli elementi usati per il drogaggio, legata alla resistività.

Come sopra accennato, il fattore di estensimetro nei semiconduttori è caratterizzato, sia da una sensibile dipendenza dalla temperatura, per cui occorre prevedere un meccanismo di compensazione per ridurne l'influenza sulla misura, sia da un'alta non linearità di ϵ in funzione della variazione $\Delta R/R$. Un esempio di estensimetro è mostrato nella figura seguente, che prende il nome di *estensimetro diffuso*.

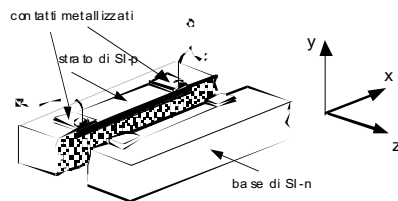


Figura 3.9. Estensimetro diffuso a semiconduttore.

La base dell'estensimetro è costituita da *Silicio*, drogato con *elementi donatori*; su un solco di questa base viene diffuso del *Silicio*, drogato con *elementi accettori*; lo spessore complessivo è dell'ordine delle decine di μm . Questo trasduttore ha la struttura di un diodo¹⁰, per cui la conduttività lungo l'asse y di figura 3.9 è piccola, se il diodo, formato dai due semiconduttori è polarizzato inversamente, cioè, la tensione elettrica della base è superiore a quella dello strato, mentre sulla direzione x la resistività è funzione delle deformazioni lungo questo asse e la sua variazione viene misurata tra i due contatti metallizzati.

MISURA DI TENSIONI CON IL PONTE DI WHEATSTONE

Come accennato precedentemente, la misura della variazione di resistenza dell'estensimetro, in seguito ad una variazione delle sue dimensioni, è eseguita con il *ponte di Wheatstone* (vedi fig. 3.10), nel quale l'estensimetro di resistenza R costituisce uno dei rami del ponte. Il ponte è alimentato con una tensione, V , che può essere continua o alternata.. Prima di portare il pezzo, su cui è montato l'estensimetro, in tensione o in compressione si equilibra il ponte, cioè si varia la resistenza R' in modo da realizzare una tensione nulla fra i punti A e B :

$$e_A - e_B = 0$$

⁹ Gli *elementi donatori* mettono in gioco delle cariche negative (elettroni), mentre *quelli accettori* delle cariche positive.

¹⁰ Vedi il paragrafo *I diodi* nel Capitolo *Note su alcuni componenti elettronici*.

In tale condizione, trascurando la corrente che attraversa il voltmetro ad alta impedenza di ingresso, usato per la misura di e_o , si ha:

$$e_A - e_C = e_A = i' \cdot R_1 = V \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

dato che e_C è uguale a zero, essendo stato messo a terra. Analogamente

$$e_B = i'' \cdot (R+r) = V \frac{R+r}{R+r+R'}$$

essendo $\Delta R = 0$. Uguagliando queste due espressioni si ha la *condizione del ponte all'equilibrio*:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R'}{R}$$

Da questo momento le tre resistenze, R_1 , R_2 ed R' , saranno considerate uguali ad R .

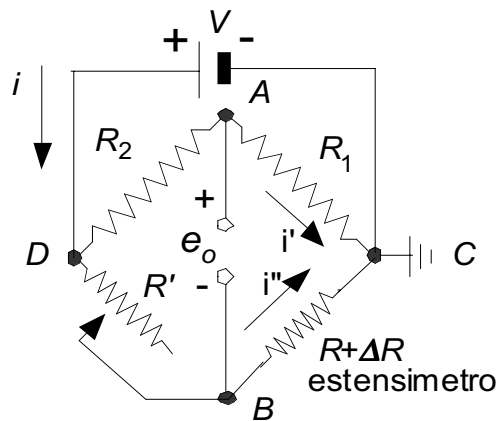


Figura 3.10. Il ponte di Wheatstone.

Se l'estensimetro subisce una deformazione, ΔL , il cambiamento della sua resistenza squilibra il ponte e il valore della tensione di squilibrio è dato da¹¹:

$$e_o = e_A - e_B = V \left(\frac{1}{2} - \frac{r + R + \Delta R}{2 \cdot R + r + \Delta R} \right) \approx -V \frac{\Delta R + r}{4 \cdot R}$$

avendo trascurato nel denominatore ΔR rispetto a $2 \cdot R$. Utilizzando la (3.6b), si ottiene:

$$e_o \approx -V \frac{\Delta R}{4 \cdot R} = -V \frac{K \cdot \varepsilon}{4}$$

La dilatazione ε si può determinare, anche, riportando il ponte all'equilibrio, agendo sulla resistenza R' e misurando la variazione della resistenza $R' = R + \Delta R'$; per la *condizione del ponte all'equilibrio* si ha $\Delta R' = \Delta R$.

I cambiamenti di temperatura modificano, sia le dimensioni del pezzo e, quindi, dell'estensimetro ivi montato, sia la resistività, ρ , dell'estensimetro stesso. Tutti questi cambiamenti si riflettono in una variazione di resistenza, ΔR_T e di un conseguente squilibrio, e_o , del ponte, anche se il pezzo non è sottoposto ad alcuna deformazione meccanica. Per annullare gli effetti di variazioni di temperatura, occorre, quindi, prevedere un opportuno meccanismo di compensazione. Ci sono due modi per compensare questi effetti, il primo dei quali consiste nell'incollare un identico estensimetro su un pezzo di materiale dello stesso tipo di quello soggetto a tensioni, ma scollegato da quest'ultimo, in modo da essere assoggettato solo alle stesse variazioni di temperatura. Nella figura 3.11 è riportato il ponte di Wheatstone con i due estensimetri collegati al ponte tramite due coppie di fili, ciascuna di resistenza r ; la struttura è sottoposta a deformazione e ad un salto di temperatura, per cui $R_1 = R + \Delta R + (\Delta R_T + r) = R + \Delta R + r'$ e $R_2 = R + (\Delta R_T + r) = R + r'$.

¹¹ Si è assegnato *a priori* il segno positivo al morsetto A e quello negativo al morsetto B.

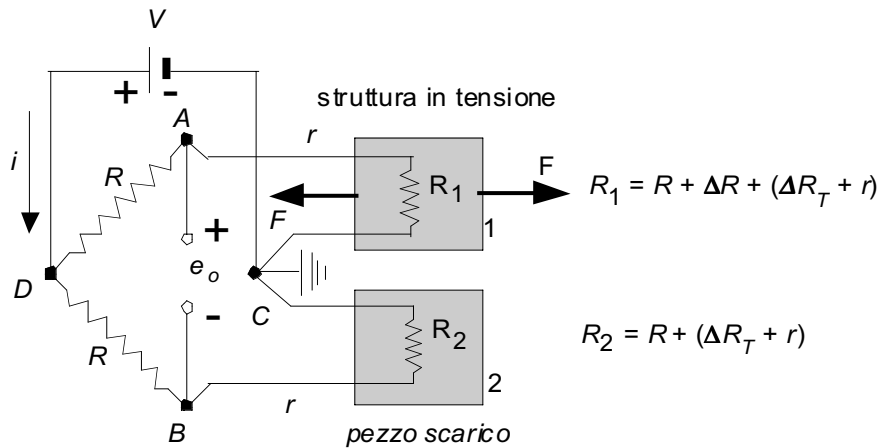


Figura 3.11. Configurazione per la compensazione degli effetti di temperatura; ΔR_T è la variazione di resistenza imputabile alla variazione di temperatura.

In caso di variazioni di temperatura, gli estensimetri, 1 e 2, subiscono la stessa variazione di resistenza, ΔR_T , e la tensione di squilibrio del ponte è:

$$e_o = e_A - e_B = V \left(\frac{1}{2} - \frac{R + \Delta R + \Delta R_T + r}{2 \cdot R + \Delta R + 2 \cdot \Delta R_T + 2 \cdot r} \right) \cong -\frac{V}{4} \frac{\Delta R}{R} \quad (3.8)$$

in cui sono stati trascurati nel denominatore gli addendi, in cui compaiono la resistenza r' e le variazioni di resistenza ΔR , dato il loro valore trascurabile. Con l'accorgimento di mettere il disturbo anomalo, r' , su due lati contigui, attraversati dalle due correnti del ponte, si è eliminata la loro influenza sul risultato finale. Questa architettura ha l'inconveniente di raddoppiare il numero degli estensimetri, aumentando, così, il costo della installazione di misura e complicandone l'apparecchiatura. Dall'esame della (3.8) si può notare che con la presenza della seconda coppia di fili di resistenza r , che collega l'estensimetro 2 al ponte, si è annullata anche l'influenza della resistenza r dei fili di collegamento del primo estensimetro.

L'altro modo per neutralizzare l'influenza della temperatura è l'utilizzo di *estensimetri autocompensati*, composti da particolari leghe, che hanno la caratteristica di variare la loro resistività in modo inverso all'effetto prodotto dalla dilatazione del pezzo su cui sono montati. Dalla (3.6a) si ha:

$$\frac{\Delta L}{L} \cdot (1 + 2 \cdot \nu) + \frac{\Delta \rho}{\rho} = 0$$

in cui $\Delta L = L \cdot \alpha_s \cdot \Delta T$ è l'allungamento dovuto alla variazione di temperatura; α_s è il coefficiente di dilatazione lineare del pezzo su cui è montato l'estensimetro e ΔT è la variazione di temperatura. Per annullare l'influenza della temperatura, occorre che la variazione di resistività segua la legge:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\alpha_s \cdot \Delta T \cdot (1 + 2 \cdot \nu)$$

La lega dell'estensimetro deve, quindi, essere scelta in funzione delle caratteristiche del pezzo su cui l'estensimetro va incollato; esistono perciò estensimetri *autocompensati* per acciaio, per bronzo, ecc. Inoltre, gli estensimetri *autocompensati* funzionano solo entro gli intervalli di temperatura per cui sono stati progettati; nonostante il loro alto costo, sono di largo impiego.

Anche i cavi di collegamento, usualmente di rame, se sono sottoposti a variazioni di temperatura, possono influenzare l'esito della misura. La loro resistenza, r , è piccola ma hanno una resistività fortemente variabile con la temperatura, che può influenzare il risultato della misura.

Con la configurazione a quattro fili di figura 3.12, le variazioni di resistenza nei quattro cavi di collegamento, in seguito a variazioni di temperatura, non influenzano il risultato della misura. Infatti, i cavi sono connessi insieme, in modo da sottostare alle stesse variazioni e sono posti su due rami contigui, attraversati dalle due correnti del ponte.

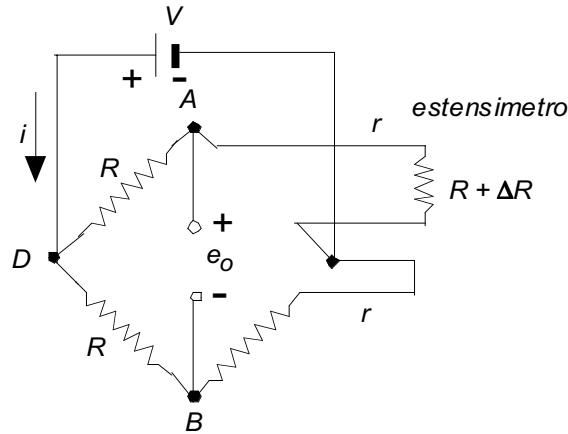


Figura 3.12. Configurazione a quattro fili.

Adottando la *configurazione a tre fili* di figura 3.13a, in cui i tre cavi sono strettamente uniti fra loro, si può raggiungere lo stesso risultato, illustrato in precedenza. Nella figura 3.13b è schematizzato in modo più chiaro il ponte di Wheatstone.

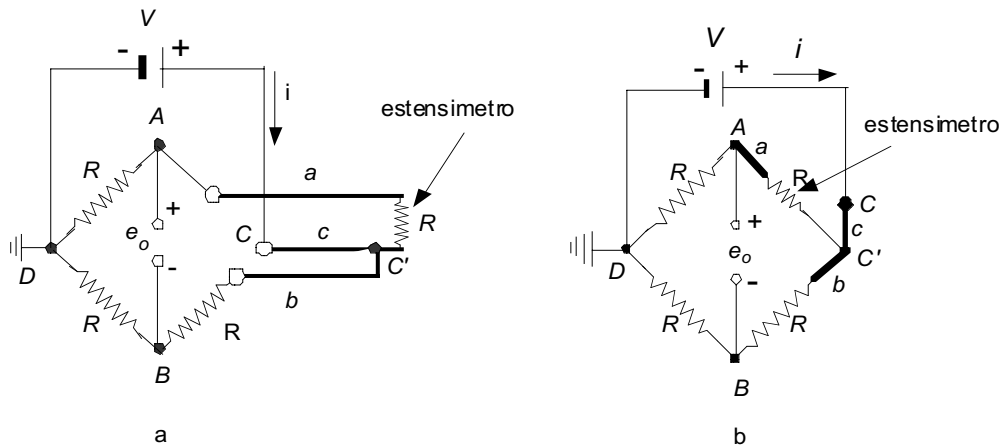


Figura 3.13. Configurazione a tre fili (a) e sua presentazione schematica (b).

Le variazioni di resistenza sui rami adiacenti *a* e *b*, dovute a variazioni termiche, non influenzano, per quanto già esposto, il valore della tensione e_o . La variazione di resistenza, ΔR , sul ramo *c* non è in grado di alterare in modo sensibile il risultato della misura. Infatti, essendo ΔV la caduta di tensione su questo ramo generata dalla variazione di resistenza, si ha:

$$e'_o = (V + \Delta V) \frac{\Delta R}{4 \cdot R} = V \frac{\Delta R}{4 \cdot R} + \Delta V \frac{\Delta R}{4 \cdot R} \cong V \frac{\Delta R}{4 \cdot R}$$

essendo ΔR la variazione di resistenza dell'estensimetro soggetto a deformazione. Poiché, sia con la *disposizione a quattro* che a *tre fili*, si usa un solo estensimetro, se il pezzo su cui è montato è soggetto a variazioni termiche, questo estensimetro deve essere autocompensato.

La tensione di alimentazione del ponte, come già esposto, può essere continua o alternata. La prima soluzione è la meno costosa, ma è più difficile l'amplificazione della tensione continua di squilibrio, e_o . La seconda, invece, richiede la presenza di un apparato elettronico per generare una tensione sinusoidale, generalmente ad alta frequenza, ma la tensione di squilibrio è più facile da amplificare, operazione che è di grande utilità per il trattamento del segnale.

La sensibilità del ponte è data dalla espressione:

$$\frac{e_o}{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)} = V \frac{1}{4}$$

ed è direttamente proporzionale alla tensione. Per aumentarne il valore, occorre innalzare la tensione di alimentazione, V e il conseguente incremento del calore, prodotto per *effetto Joule*, innalza la temperatura dell'estensimetro. Occorre, quindi, raggiungere un compromesso fra l'aumento di sensibilità ed il calore massimo sopportabile dall'estensimetro. Valori tipici delle grandezze elettriche di un ponte di Wheatstone sono:

$$\begin{aligned}
 IV &= 5 \div 10 \text{ V} \\
 e_o &= 20 \div 50 \text{ mV} \\
 i &= 4 \div 30 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

Per aumentare la sensibilità del ponte, potendo disporre di più estensimetri soggetti a deformazioni, si può ricorrere alle seguenti configurazioni.

CONFIGURAZIONE CON DUE ESTENSIMETRI

I due estensimetri, soggetti alla *stessa deformazione* sia in modulo, sia in segno, sono posizionati su due *rami contigui* del ponte, come è mostrato nella figura 3.14a. In questo caso la tensione di squilibrio, e_o , è data dall'espressione:

$$e_o = V \left(\frac{1}{2} - \frac{R + \Delta R}{2(R + \Delta R)} \right) = 0$$

poiché gli estensimetri sono posti su due rami contigui del ponte attraversati dalla stessa corrente. Con questa configurazione il ponte *non* è in grado di diagnosticare la presenza di eventuali tensioni.

La disposizione di figura 3.14b consente, invece, questa diagnosi, poiché nella tensione di squilibrio compare la variazione di resistenza dell'estensimetro:

$$e_o = V \left(\frac{R + \Delta R}{2R + \Delta R} - \frac{R}{2(R + \Delta R)} \right) \cong \frac{V}{2} \frac{\Delta R}{R}$$

In questa espressione si è trascurato nel denominatore il termine ΔR in rapporto a $2R$. Con questa disposizione la sensibilità del ponte è aumentata di un *fattore due*, rispetto a quella, in cui è stato utilizzato un solo estensimetro.

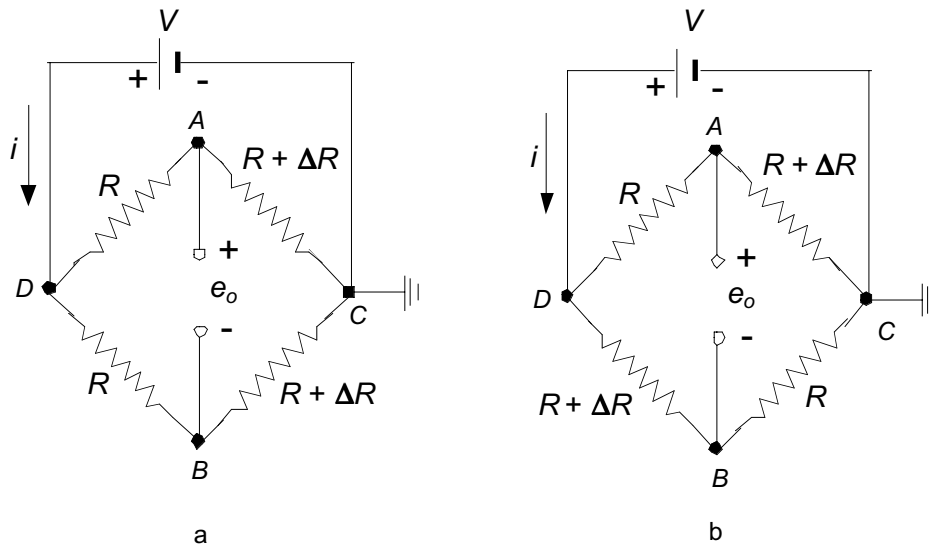


Figura 3.14. Configurazioni per accrescere la sensibilità del ponte, utilizzando due estensimetri soggetti alla stessa deformazione: configurazione non corretta (a) e configurazione corretta (b).

Se i due estensimetri sono soggetti a *deformazioni uguali* in modulo, ma di *segno opposto*, la disposizione che consente il raddoppio della sensibilità è quella presentata nella figura 3.15b. Infatti la tensione di squilibrio è espressa dalla relazione:

$$e_o = V \left(\frac{1}{2} - \frac{R - \Delta R}{2 \cdot R} \right) = \frac{V}{2} \frac{\Delta R}{R}$$

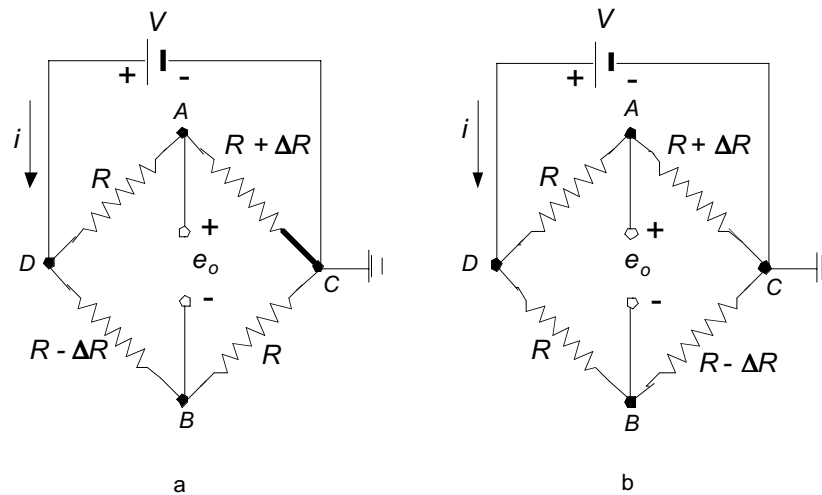


Figura 3.15. Configurazioni per accrescere la sensibilità del ponte: configurazione non corretta (a) e configurazione corretta (b).

È da scartare la soluzione di figura 3.15a, poiché la tensione del ponte è data dalla espressione seguente:

$$e_o = V \left(\frac{R - \Delta R}{2R - \Delta R} - \frac{R}{2(R + \Delta R)} \right) \cong \frac{V}{4} \frac{\Delta R^2}{R^2} \cong 0$$

CONFIGURAZIONE CON QUATTRO ESTENSIMETRI

Potendo disporre di quattro estensimetri sottoposti a deformazioni uguali in modulo e, a coppie, di segno contrario, come mostrato nella figura 3.16, la sensibilità del ponte può essere accresciuta di un fattore quattro:

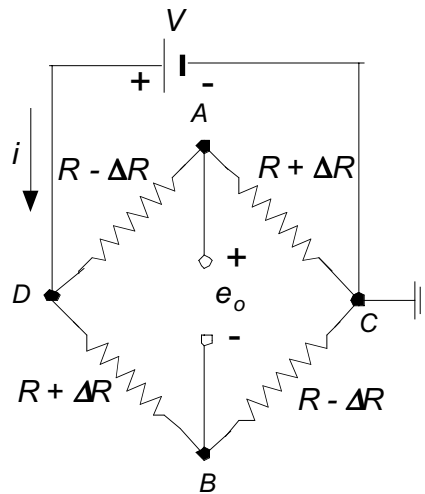


Figura 3.16. Configurazione a quattro estensimetri per aumentare la sensibilità del ponte.

Infatti, la tensione di squilibrio è data dalla espressione:

$$e_o = V \left(\frac{R + \Delta R}{2R} - \frac{R - \Delta R}{2R} \right) = V \frac{\Delta R}{R}$$

Un esempio di utilizzo di questo tipo di configurazione è la misura di deformazioni in una trave incastrata soggetta a pesi (vedi fig. 3.17a) o in una membrana incastrata ai bordi, sollecitata da una pressione (vedi fig. 3.17b); due estensimetri vengono posizionati sulla superficie in cui le fibre sono compresse e gli altri due dove le fibre sono tese.

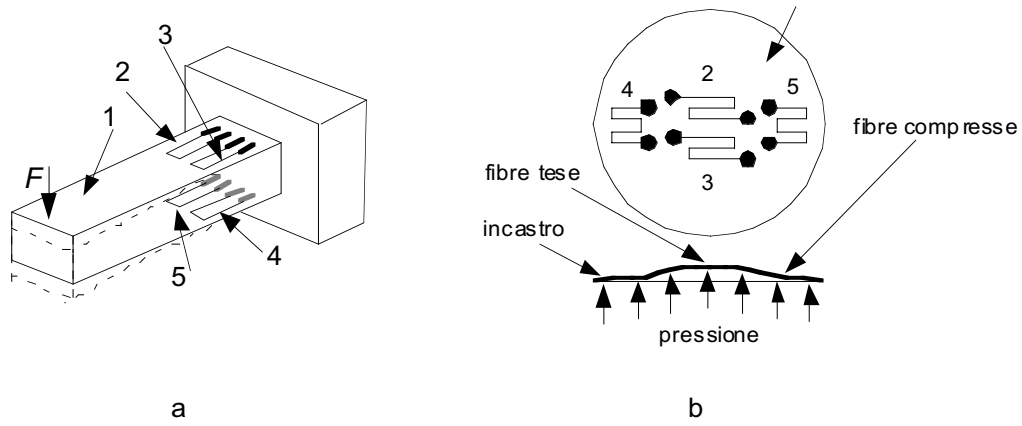


Figura 3.17. Barra incastrata (a) e membrana incastrata ai bordi (b), equipaggiate con quattro estensimetri, due in trazione (2, 3) e due in compressione (4, 5).