

2. LA MODULAZIONE DI AMPIEZZA

Per semplicità di trattazione, senza, però, nulla togliere alla correttezza delle conclusioni che verranno tratte, ci si limiterà a considerare *segnali di tipo periodico*, segnali, cioè, il cui andamento temporale si ripete a distanza regolare di un tempo, T , detto periodo¹:

$$g(t) = g(t + T)$$

Una funzione periodica può essere espressa da una somma di funzioni sinusoidali, la *serie di Fourier*, la cui frequenza è multipla della frequenza fondamentale, $f = 1/T$:

$$g(t) = g_o + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f \cdot t + \psi_k)$$

in cui ψ_k è la fase dell'armonica k -esima e g_k è la relativa ampiezza.

La *modulazione in ampiezza* consiste nel moltiplicare una funzione, ad esempio, il segnale, proveniente da un sensore, per una funzione sinusoidale di frequenza f_p , detta *funzione portante*, mentre la funzione $g(t)$ è detta *funzione modulante*:

$$h(t) = g(t) \cdot e_p \cdot \text{sen } 2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t$$

Per potere estrarre dalla funzione modulata la *funzione modulante*, per potere, cioè, eseguire l'operazione di demodulazione, occorre rispettare le seguenti condizioni:

– la *funzione portante* deve avere un andamento temporale uguale a quello del valore assoluto di una funzione sinusoidale:

$$e_p(t) = e_p \cdot |\text{sen } 2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t|$$

– la *funzione modulante* deve essere periodica a banda limitata, cioè, deve avere un numero limitato di armoniche:

$$g(t) = g_o + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f \cdot t + \psi_k)$$

per cui:

$$h(t) = g(t) \cdot e_p \cdot |\text{sen } 2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t|$$

– la frequenza della *funzione portante* deve essere molto maggiore² della massima frequenza presente nella *funzione modulante*:

$$f_p \gg f_k = 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f \tag{2.1}$$

Se sono rispettate queste condizioni si determina una situazione interessante: la funzione $h(t)$ può essere espressa dalla somma di due funzioni:

$$h(t) = c \cdot g(t) + g_1(t)$$

La prima funzione è proporzionale alla funzione $g(t)$, mentre la seconda è una funzione periodica, le cui armoniche hanno una frequenza uguale, o superiore, al doppio della portante, f_p . Questo permette l'estrazione del segnale $g(t)$ mediante il semplice utilizzo di un *filtro passa basso*³, la cui frequenza di taglio, f_t , è compresa fra la frequenza f_k e la frequenza della portante, f_p :

$$f_k < f_t < f_p$$

Facciamo, di seguito, alcuni esempi di tipo qualitativo per chiarire quanto esposto.

Supponiamo di avere un segnale sinusoidale (*segnale modulante*) con una frequenza pari a $\omega_m = 2 \cdot \pi \cdot f_m = 3.14 \text{ rad/s}$:

$$e_m(t) = e_m \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot t)$$

la cui rappresentazione grafica è mostrata nella figura 2.1.

¹ Per segnali non periodici si giunge alle stesse conclusioni, utilizzando la *Trasformata di Fourier* al posto della *Serie di Fourier* (vedi appendice al capitolo *La misura di grandezze tempo-varianti*).

² Come minimo di un ordine di grandezza.

³ Vedi il Capitolo *Filtri passivi e attivi*.

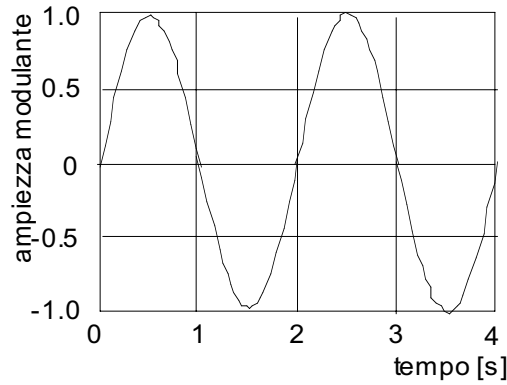


Figura 2.1. Andamento della funzione modulante.

Questa funzione modula in ampiezza la *funzione portante*

$$e_p(t) = e_p \cdot \text{sen}(\omega_p \cdot t) \tag{2.2}$$

con $\omega_p = 251 [rad/s]$, presentata nella figura 2.2; si noti la scelta della frequenza della portante con un valore molto superiore a quello della modulante.

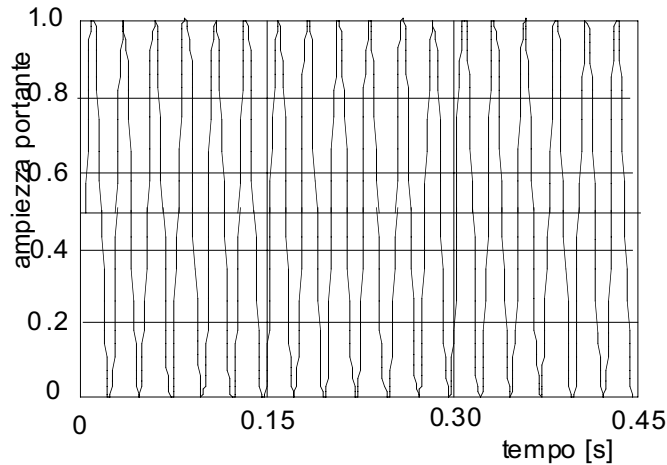


Figura 2.2. Andamento temporale della funzione portante.

Il risultato della modulazione è mostrato nella figura 2.3a.

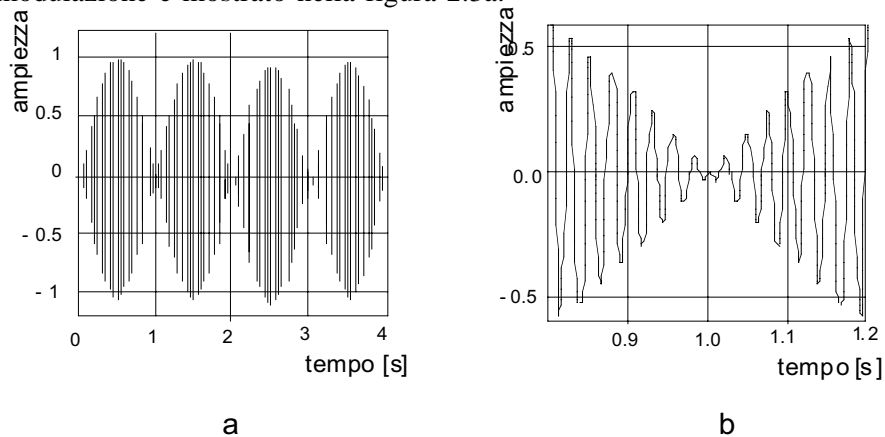


Figura 2.3. Andamento temporale della funzione modulata in ampiezza (a) e particolare della funzione in prossimità del passaggio per lo zero (b).

Nella figura 2.3b è mostrato l'andamento della funzione modulata in prossimità del passaggio per lo zero. Si nota un cambiamento della fase della funzione in corrispondenza del cambiamento di segno della funzione modulante.

Per potere eseguire l'operazione di *demodulazione* è necessario utilizzare, come accennato in precedenza, il valore assoluto della portante:

$$e_o(t) = e_m \cdot e_p \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot t) \cdot |\text{sen}(\omega_p \cdot t)|$$

il cui risultato è mostrato nella figura 2.4.

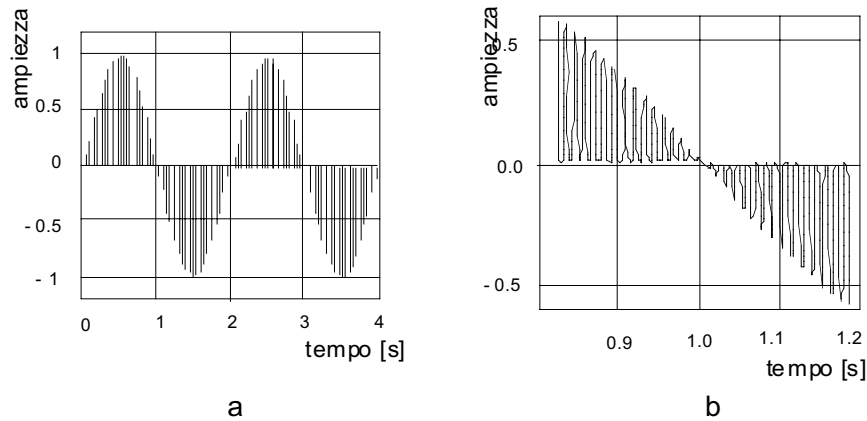


Figura 2.4. Andamento della funzione modulata, utilizzando il valore assoluto della portante (a) e particolare della funzione nell'intorno del passaggio per lo zero (b).

Il comportamento della funzione modulata nell'intorno del passaggio per lo zero della funzione modulante è mostrato nella figura 2.4b. Si può notare che l'andamento dei picchi della funzione segue quello della funzione modulante, dato che la portante è sempre positiva. La funzione modulante può essere estratta, utilizzando un filtro passa basso, la cui frequenza di taglio, ω_c , è compresa fra 2.14 (rad/s) e 188.5 (rad/s); il risultato del filtraggio è mostrato nella figura seguente.

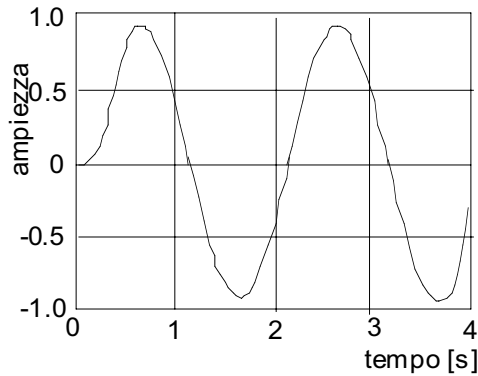


Figura 2.5. Andamento della funzione modulata filtrata con un filtro passa basso.

L'operazione di filtraggio introduce uno sfasamento temporale nella funzione di uscita dal filtro, rispetto alla funzione modulante, come è evidenziato nella figura. Viene presentato un altro esempio, in cui il segnale proveniente dal sensore ha l'andamento di figura 2.6.

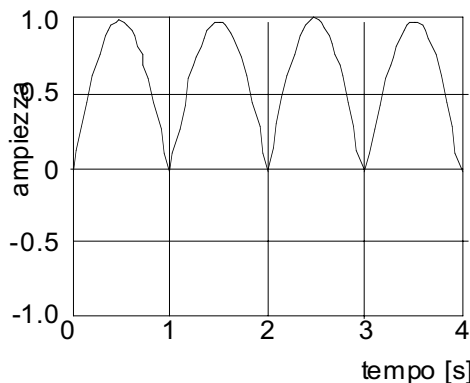


Figura 2.6. Andamento del segnale proveniente dal sensore.

Utilizzando la funzione portante (2.2), la funzione modulata ha un aspetto apparentemente uguale a quello illustrato in precedenza, come si può constatare nella figura 2.7a, tranne che per il comportamento della funzione nell'intorno dello zero, presentato nella figura 2.7b. Non si nota un cambiamento di fase nel segnale, dato che la funzione modulante non cambia di segno nel passaggio per lo zero.

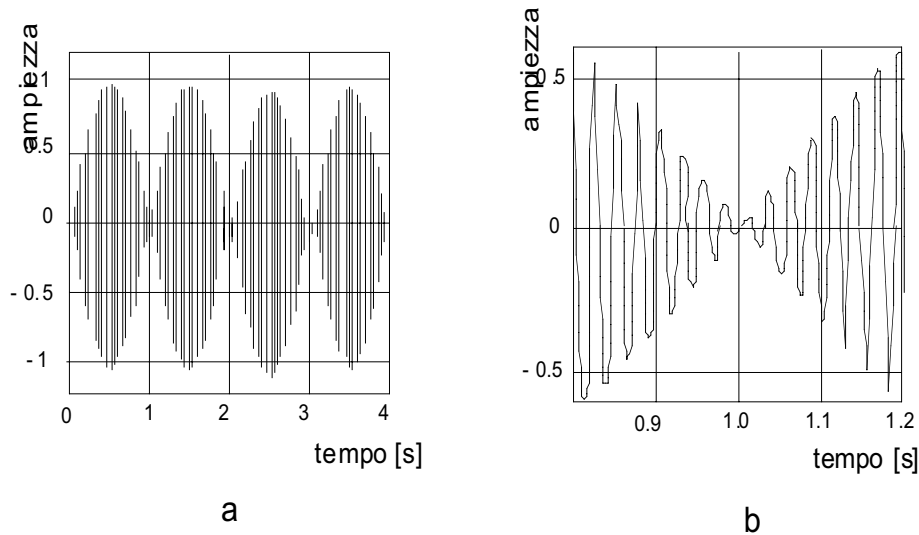


Figura 2.7. Andamento della funzione modulata con la modulante di figura 2.8 (a) e andamento nell'intorno del passaggio per lo zero (b).

Per potere eseguire l'operazione di demodulazione è necessario utilizzare il valore assoluto della portante, il cui risultato è mostrato nella figura 2.8.

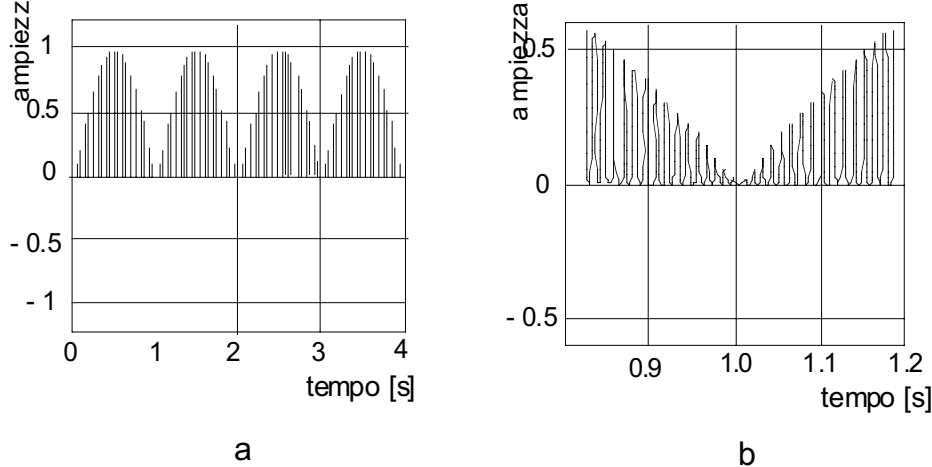


Figura 2.8. Andamento della funzione modulata, utilizzando il valore assoluto della portante (a) e andamento della funzione nell'intorno del passaggio per lo zero (b).

Il comportamento della funzione modulata nell'intorno del passaggio per lo zero della funzione modulante è mostrato nella figura 2.8b.

Il risultato del filtraggio passa basso di questo segnale è mostrato nella figura seguente. Si nota, anche in questo caso, come il risultato del filtraggio mostri un leggero ritardo rispetto al segnale modulante.

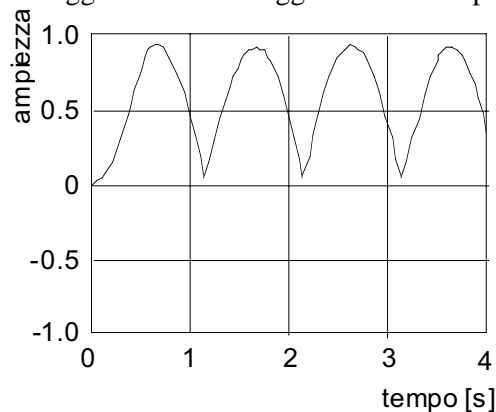


Figura 2.9. Andamento della funzione modulata in filtrata con un filtro passa basso.

Di seguito viene riportata una breve trattazione matematica, che chiarisce quanto esposto in precedenza. Il risultato della modulazione è dal punto di vista matematico espressa dal prodotto della funzione

modulante, $e_m(t)$, che si suppone per il momento essere una funzione sinusoidale, per il valore assoluto della funzione portante:

$$e_o(t) = e_p \cdot e_m \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot t) \cdot |\text{sen}(\omega_p \cdot t)|$$

con $\omega_p \gg \omega_m$.

Dato che la funzione portante

$$|e_p(t)| = e_p \cdot |\text{sen}(\omega_p \cdot t)|$$

è periodica con periodo pari a:

$$T_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_p},$$

essa può essere scomposta in una somma di funzioni sinusoidali mediante il suo sviluppo in serie di Fourier⁴:

$$|e_p(t)| = \frac{1}{2} a_o + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \cos\left(j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T_p} \cdot t\right) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot \text{sen}\left(j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T_p} \cdot t\right)$$

in cui:

$$a_o = \frac{2}{T_p} \cdot e_p \int_0^{T_p} |\text{sen}(\omega_p \cdot t)| \cdot dt$$

$$a_j = \frac{2}{T_p} \cdot e_p \int_0^{T_p} |\text{sen}(\omega_p \cdot t)| \cdot \cos(j \cdot 2 \cdot \omega_p \cdot t) \cdot dt$$

$$b_j = \frac{2}{T_p} \cdot e_p \int_0^{T_p} |\text{sen}(\omega_p \cdot t)| \cdot \text{sen}(j \cdot 2 \cdot \omega_p \cdot t) \cdot dt$$

Data la forma della funzione $|e_p(t)|$, si nota che i coefficienti b_j sono uguali a zero, per cui:

$$|e_p(t)| = \frac{1}{2} a_o + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \cos(j \cdot 2 \cdot \omega_p \cdot t) \quad (2.3)$$

Di conseguenza:

$$e_o(t) = \frac{1}{2} e_m \cdot a_o \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot t) + e_m \cdot a_1 \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \omega_p \cdot t) + \\ + e_m \cdot a_2 \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot t) \cdot \cos(4 \cdot \omega_p \cdot t) + \dots$$

Ricordando che:

$$\text{sen}(\omega_m \cdot t) \cdot \cos(k \cdot 2 \cdot \omega_p \cdot t) = \frac{1}{2} [\text{sen}(k \cdot 2 \cdot \omega_p + \omega_m) \cdot t - \text{sen}(k \cdot 2 \cdot \omega_p - \omega_m) \cdot t] \quad (2.4)$$

con $k = 1, 2, \dots$, si ha:

$$e_o(t) = \frac{1}{2} \cdot e_m \cdot a_o \cdot \text{sen}(\omega_m \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot e_m \cdot a_1 \cdot [\text{sen}(2 \cdot \omega_p + \omega_m) \cdot t - \text{sen}(2 \cdot \omega_p - \omega_m) \cdot t] + \\ + \frac{1}{2} \cdot e_m \cdot a_2 \cdot [\text{sen}(4 \cdot \omega_p + \omega_m) \cdot t - \text{sen}(4 \cdot \omega_p - \omega_m) \cdot t] + \\ + \frac{1}{2} \cdot e_m \cdot a_3 \cdot [\text{sen}(6 \cdot \omega_p + \omega_m) \cdot t - \text{sen}(6 \cdot \omega_p - \omega_m) \cdot t] + \dots$$

Se si rispetta la condizione che

$$\omega_m \ll \omega_p,$$

si ha che la frequenza, ω_m , della prima armonica della funzione $e_o(t)$ è decisamente separata dalle frequenze delle altre armoniche, pari a:

$$(2 \cdot \omega_p - \omega_m), (2 \cdot \omega_p + \omega_m), (4 \cdot \omega_p - \omega_m), (4 \cdot \omega_p + \omega_m), \text{ ecc.}$$

come è mostrato nella figura seguente, che mostra l'andamento delle ampiezze della (2.4):

⁴ Vedi il paragrafo *Note sulla serie e sulla trasformata di Fourier* nel Capitolo *Misure di grandezze tempo-varianti*.

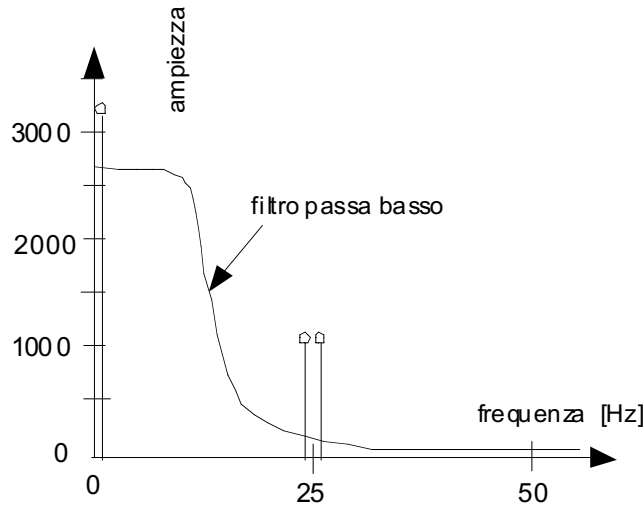


Figura 2.10. Andamento delle ampiezze delle armoniche della funzione di figura 2.4 e dell'ampiezza del filtro passa basso.

La frequenza della prima armonica è uguale a quella della funzione modulante, per cui, se si filtra la funzione $e_o(t)$, con un filtro passa basso, che lascia passare solo la prima armonica ed elimina le altre, si ottiene in uscita dal filtro una funzione simile alla funzione modulante, come mostrato nella figura 2.5, a parte il leggero ritardo.

Se si è in presenza di un segnale modulante non sinusoidale, periodico per semplicità, come ad esempio, il segnale di figura 2.11, che ha il periodo $T_m = 1\text{ s}$ e una frequenza $\omega_m = 2 \cdot \pi \text{ rad/s}$.

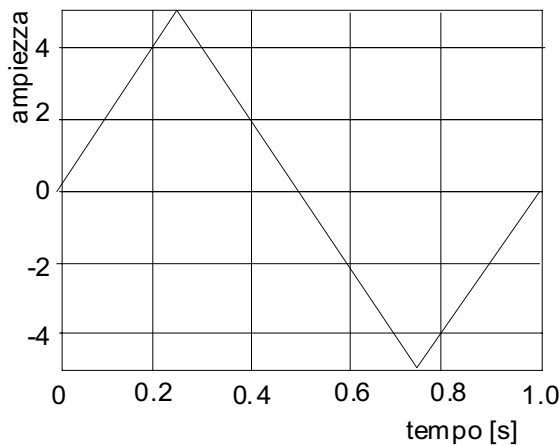


Figura 2.11. Andamento temporale del segnale del sensore.

Questo segnale può essere sviluppato in serie di Fourier ed è a *banda limitata*, nel senso che le armoniche, la cui frequenza è superiore a 10 Hz danno un contributo insignificante al segnale, per cui lo sviluppo in Serie può essere limitato ad un numero finito di addendi:

$$e_m(t) \cong e_{m0} + \sum_{k=1}^K e_{mk} \cdot \text{sen}(2 \cdot k \cdot \omega_m \cdot t + \psi_k)$$

Scegliendo una funzione portante con una frequenza, ω_p , decisamente superiore a $\omega_k = K \cdot \omega_m$

$$\omega_p \gg \omega_k = K \cdot \omega_m$$

si ottiene una funzione modulata

$$e_o(t) = e_m(t) \cdot e_p \cdot |\text{sen}(\omega_p \cdot t)| = e_{p0} + \sum_{h=1}^{\infty} e_{ph} \cdot \cos(2 \cdot h \cdot \omega_p \cdot t) \quad (2.5)$$

mostrata nella figura 2.12.

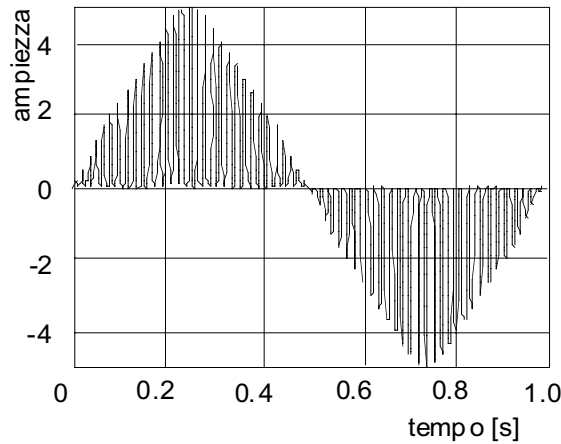


Figura 2.12. Andamento della funzione modulata

Esplicitando la (2.5) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 e_o(t) &= e_m(t) \cdot e_p(t) = \left[e_{m0} + \sum_{k=1}^N e_{mk} \cdot \text{sen}(k \cdot \omega_m \cdot t + \psi_k) \right] \cdot \left[e_{p0} + \sum_{h=1}^{\infty} e_{ph} \cdot \cos(2 \cdot h \cdot \omega_p \cdot t) \right] = \\
 &= e_{p0} \cdot \left[e_{m0} + \sum_{k=1}^N e_{mk} \cdot \text{sen}(k \cdot \omega_m \cdot t + \psi_k) \right] + \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ e_{ph} \cdot \cos(2 \cdot h \cdot \omega_p \cdot t) \cdot \left[e_{m0} + \sum_{k=1}^N e_{mk} \cdot \text{sen}(k \cdot \omega_m \cdot t + \psi_k) \right] \right\} = \\
 &= e_{p0} \cdot \left[e_{m0} + \sum_{k=1}^N e_{mk} \cdot \text{sen}(k \cdot \omega_m \cdot t + \psi_k) \right] + e_{m0} \cdot \sum_{h=1}^{\infty} [e_{ph} \cdot \cos(2 \cdot h \cdot \omega_p \cdot t)] + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^N \sum_{h=1}^{\infty} [e_{mk} \cdot e_{ph} \cdot \text{sen}(k \cdot \omega_m \cdot t + \psi_k) \cdot \cos(2 \cdot h \cdot \omega_p \cdot t)]
 \end{aligned}$$

Il termine

$$e_{p0} \cdot \left[e_{m0} + \sum_{k=1}^N e_{mk} \cdot \text{sen}(k \cdot \omega_m \cdot t + \psi_k) \right]$$

è proporzionale alla funzione modulante $e_m(t)$, mentre i termini

$$e_{m0} \cdot \sum_{h=1}^{\infty} [e_{ph} \cdot \cos(2 \cdot h \cdot \omega_p \cdot t)] \quad e \quad \sum_{k=1}^N \sum_{h=1}^{\infty} [e_{mk} \cdot e_{ph} \cdot \text{sen}(k \cdot \omega_m \cdot t + \psi_k) \cdot \cos(2 \cdot h \cdot \omega_p \cdot t)]$$

sono caratterizzati da frequenze, pari a $2 \cdot h \cdot \omega_p$ e $2 \cdot h \cdot \omega_p \pm k \cdot \omega_m$, rispettivamente, decisamente superiori alle frequenze della funzione modulante.

Per estrarre il termine proporzionale alla funzione modulante è sufficiente l'impiego di un filtro passa basso con una frequenza di taglio, ω_t , compresa fra

$$N \cdot \omega_m < \omega_t < 2 \cdot \omega_p - N \cdot \omega_m$$

Il diagramma delle ampiezze delle varie armoniche è mostrato nella figura seguente, che si riferisce al caso di uno spostamento periodico, come quello di figura 2.11 con una frequenza pari a $f_m = 1 \text{ Hz}$ e una funzione portante di frequenza $f_p = 30 \text{ Hz}$:

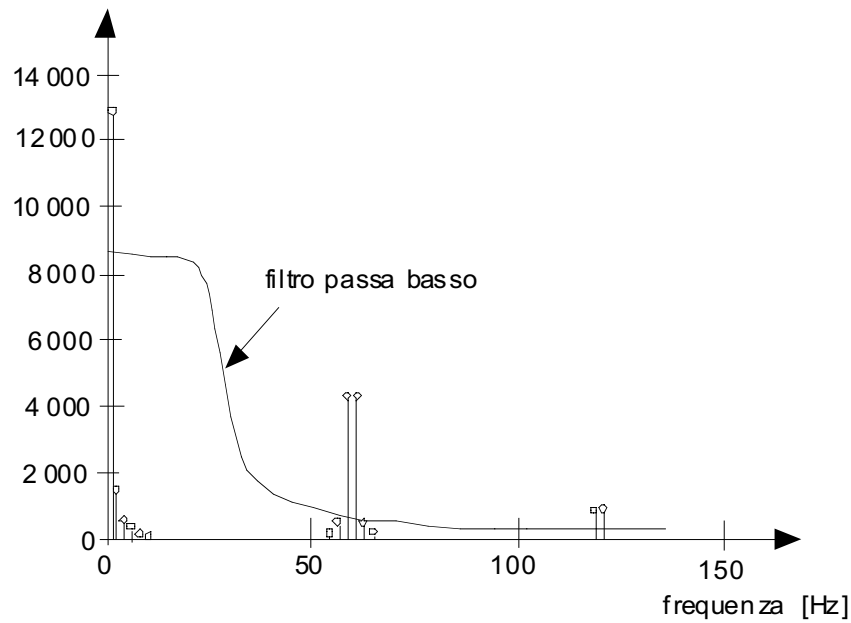


Figura 2.13. Andamento delle ampiezze delle armoniche della funzione (2.4) e andamento dell'ampiezza del filtro passa basso.

In queste condizioni è sufficiente l'impiego di un *filtro passa basso* con una frequenza di taglio di 25 Hz per estrarre la parte della corrispondente alla modulante, come è mostrato nella figura seguente.

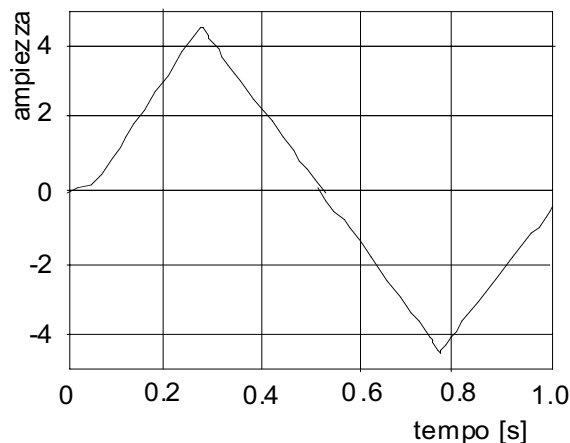


Figura 2.14. Andamento della funzione modulata filtrata con un filtro passa basso.

Si può notare che il segnale filtrato è simile a quello della funzione modulante a parte un ritardo introdotto dal filtro.