Giuseppe Anzalone
Paolo Bassignana
Giuseppe Brafa Musicoro

Fondamenti di Meccanica e Macchine

Teoria e applicazioni

EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO

Copyright © Ulrico Hoepli Editore S.p.A. 2009
via Hoepli 5, 20121 Milano (Italy)
tel. +39 02 864871 – fax +39 02 8052886
e-mail hoepli@hoepli.it

www.hoepli.it

Tutti i diritti sono riservati a norma di legge
e a norma delle convenzioni internazionali

ISBN 978-88-203-4223-4

Ristampa:

4 3 2 1 0 2009 2010 2011 2012 2013

Copertina: MN&CG S.r.l., Milano

Soggetto di copertina: Motore cinque cilindri LANCIA - disegno UTS-COMAU per Fiat PWT

Redazione e coordinamento: Luigi Caligaris, Stefano Fava, Carlo Tomasello

Progetto grafico e fotocomposizione: Maria Giovanna Mascaro, CityBees Communication S.r.l., Torino

Revisione a cura di: Katia Cicuto, CityBees Communication S.r.l., Torino

Stampa: L.E.G.O. S.p.A., Stabilimento di Lavis (Trento)

Printed in Italy

INDICE

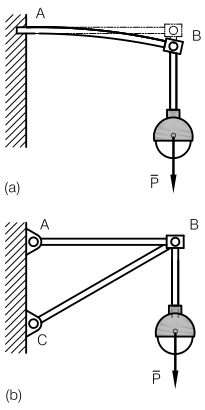
Prefazione IX

MODULO A

Statica 2

Verifica prerequisiti 3

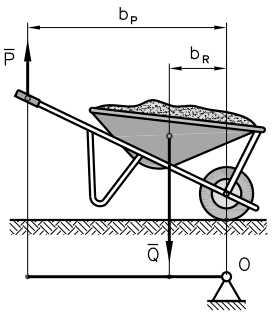
UNITÀ A1



LE FORZE, I MOMENTI DELLE FORZE E I SISTEMI DI FORZE EQUILIBRATI 4

A1.1 Il concetto di forza 5
A1.2 Composizione di forze complanari 6
A1.3 Scomposizione di una forza data in due componenti convergenti di direzioni note 9
A1.4 Composizione di due forze parallele 10
A1.5 Teorema delle proiezioni 12
A1.6 Il momento di una forza 13
A1.7 Teorema di Varignon 14
A1.8 Coppia di forze 15
A1.9 Trasporto di una forza parallelamente a se stessa 16
A1.10 Equilibrio di un sistema di forze 18
A1.11 I corpi vincolati 19
Studio di un caso 22
Formulario essenziale 24
Unità in breve 24
Autoverifica dell'apprendimento 26

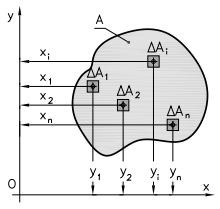
UNITÀ A2



LE MACCHINE SEMPLICI 28

A2.1 Caratteristiche delle macchine semplici 29
A2.2 La leva 29
A2.3 La carrucola e il paranco 32
A2.4 Il verricello e l'argano 35
A2.5 Il piano inclinato 36
A2.6 Il cuneo 38
A2.7 La vite 39
Studio di un caso 42
Formulario essenziale 43
Unità in breve 44
Autoverifica dell'apprendimento 45

UNITÀ A3



GEOMETRIA DELLE MASSE 47

A3.1 Centro delle forze parallele e baricentro 48
A3.2 Teoremi di Guldino 51
A3.3 Momenti statici di superficie 53
A3.4 Momenti quadratici di superficie 56
A3.5 Momento d'inerzia assiale di massa 62
Studio di un caso 64

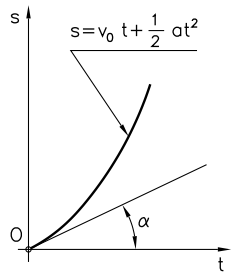
Formulario essenziale 66
Unità in breve 67
Autoverifica dell'apprendimento 68
Verifica di Modulo 69

MODULO B

Cinematica 70

Verifica prerequisiti 71

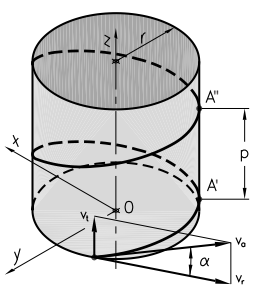
UNITÀ B1



CINEMATICA DEL PUNTO 72

B1.1 Grandezze cinematiche del moto di un punto 73
B1.2 Moto rettilineo uniforme 75
B1.3 Moto rettilineo uniformemente vario 77
B1.4 Moto rettilineo uniformemente accelerato 78
B1.5 Moto rettilineo uniformemente ritardato 82
B1.6 Moto naturalmente accelerato 83
B1.7 Moto circolare uniforme 86
B1.8 Moto circolare uniformemente vario 90
Studio di un caso 93
Formulario essenziale 95
Unità in breve 96
Autoverifica dell'apprendimento 97

UNITÀ B2



CINEMATICA DEI MOTI COMPOSTI E DEI CORPI RIGIDI 98

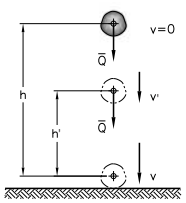
B2.1 Moti relativi e moti assoluti 99
B2.2 Moti composti 101
B2.3 Moto armonico 109
B2.4 Moto dei corpi rigidi 111
B2.5 Moto del corpo rigido parallelamente a un piano fisso 112
Studio di un caso 117
Formulario essenziale 119
Unità in breve 121
Autoverifica dell'apprendimento 122
Verifica di Modulo 124

MODULO C

Dinamica 126

Verifica prerequisiti 127

UNITÀ C1

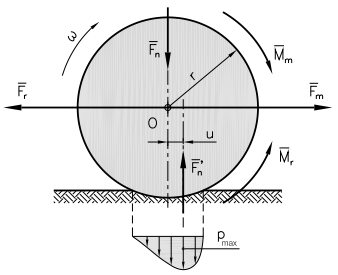


DINAMICA DEL PUNTO 128

C1.1 Le leggi fondamentali della Dinamica 129
C1.2 Il principio di D'Alembert 131
C1.3 Forza centripeta e forza centrifuga 134
C1.4 Lavoro ed energia 139
C1.5 Potenza sviluppata da una forza 145
Studio di un caso 147

Formulario essenziale 149
Unità in breve 150
Autoverifica dell'apprendimento 151

UNITÀ C2



DINAMICA DEI CORPI RIGIDI E RESISTENZE PASSIVE 153

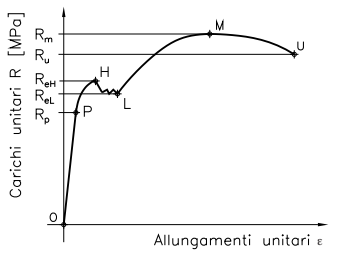
C2.1 Seconda legge della Dinamica applicata ai corpi rigidi in rotazione 154
C2.2 Lavoro ed energia nel moto rotatorio 157
C2.3 Potenza nel moto di rotazione 159
C2.4 Resistenza d'attrito radente 160
C2.5 Resistenza d'attrito volvente 163
C2.6 Resistenza del mezzo 165
C2.7 Rendimento di macchine e meccanismi 169
Studio di un caso 172
Formulario essenziale 174
Unità in breve 175
Autoverifica dell'apprendimento 176
Verifica di Modulo 178

MODULO D

Sollecitazioni dei materiali 180

Verifica prerequisiti 181

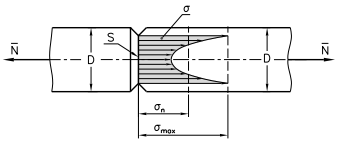
UNITÀ D1



RESISTENZA DEI MATERIALI E CONDIZIONI DI SICUREZZA 182

D1.1 Sollecitazioni, deformazioni e tensioni interne 183
D1.2 Criteri di resistenza dei materiali 190
D1.3 Sollecitazioni di fatica 193
Studio di un caso 197
Formulario essenziale 199
Unità in breve 199
Autoverifica dell'apprendimento 201

UNITÀ D2



SOLLECITAZIONI SEMPLICI E COMPOSTE 202

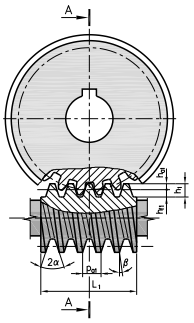
D2.1 Sollecitazioni assiali di trazione o di compressione 203
D2.2 Sollecitazioni di flessione 207
D2.3 Sollecitazioni di taglio 212
D2.4 Sollecitazioni di torsione 214
D2.5 Esempi di sollecitazioni composte 217
Studio di un caso 222
Formulario essenziale 223
Unità in breve 224
Autoverifica dell'apprendimento 226
Verifica di Modulo 227

MODULO E

Meccanica applicata alle macchine 228

Verifica prerequisiti 229

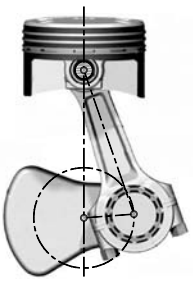
UNITÀ E1



TRASMISSIONE DEL MOTO MEDIANTE ORGANI RIGIDI E FLESSIBILI **230**

E1.1 Trasmissione del moto con ruote di frizione 231
E1.2 Trasmissione del moto fra alberi paralleli mediante ruote dentate 233
E1.3 Proporzionamento delle ruote dentate cilindriche 236
E1.4 Trasmissione del moto fra alberi concorrenti o sghembi mediante ruote dentate 243
E1.5 Trasmissione del moto con cinghie, funi e catene 244
Studio di un caso 253
Formulario essenziale 254
Unità in breve 254
Autoverifica dell'apprendimento 256

UNITÀ E2



TRASMISSIONE E TRASFORMAZIONE DEL MOTO MEDIANTE CINEMATISMI **258**

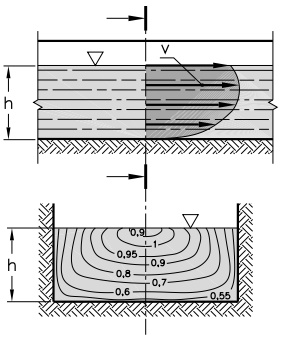
E2.1 Cinematica del sistema biella-manovella 259
E2.2 Ripartizione delle masse nella biella 263
E2.3 Equilibratura del sistema biella-manovella 266
E2.4 Camme ed eccentrici 273
Studio di un caso 277
Formulario essenziale 278
Unità in breve 278
Autoverifica dell'apprendimento 280
Verifica di Modulo 281

MODULO F

Idraulica **282**

Verifica prerequisiti 283

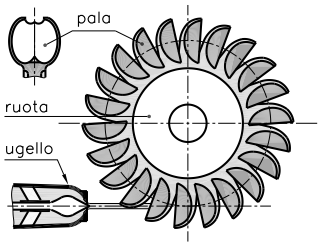
UNITÀ F1



IDRAULICA E TRATTAMENTO DELLE ACQUE **284**

F1.1 Massa volumica, densità e peso volumico dei liquidi 285
F1.2 Pressione e differenza di pressioni 286
F1.3 La legge di Stevin e il principio di Pascal 288
F1.4 Il galleggiamento dei corpi 291
F1.5 La portata e le leggi del moto 291
F1.6 Il teorema di Bernoulli e il tubo di Venturi 293
F1.7 Il moto dei fluidi reali 294
F1.8 Le acque naturali e il loro inquinamento 295
F1.9 Trattamenti e impianti di depurazione per le acque residue urbane e industriali 296
F1.10 La potabilizzazione delle acque 298
F1.11 La legislazione vigente sul controllo delle risorse idriche 298
Studio di un caso 299
Formulario essenziale 300
Unità in breve 300
Autoverifica dell'apprendimento 302

UNITÀ F2



IMPIANTI IDRAULICI, POMPE E TURBINE 304

F2.1 Le pompe 305
F2.2 Applicazioni idrauliche industriali e civili 311
F2.3 Le turbine idrauliche 312
F2.4 Gli impianti idroelettrici 314
F2.5 La misurazione delle grandezze fluidodinamiche 316
Studio di un caso 318
Formulario essenziale 319
Unità in breve 319
Autoverifica dell'apprendimento 321
Verifica di Modulo 322

MODULO G

Energetica 324

Verifica prerequisiti 325

UNITÀ G1

ENERGIE RINNOVABILI E NON RINNOVABILI 326

G1.1 L'energia 327
G1.2 Le forme dell'energia 331
G1.3 Le fonti di energia 335
G1.4 Energie innovative 336
G1.5 Il fabbisogno di energia 341
G1.6 Il problema ambientale 343
G1.7 Il sistema energetico europeo e italiano 344
G1.8 Classificazione delle macchine a fluido 346
Studio di un caso 350
Formulario essenziale 351
Unità in breve 351
Autoverifica dell'apprendimento 353

UNITÀ G2

TECNICHE DI CAPTAZIONE E UTILIZZAZIONE DELL'ENERGIA SOLARE 354

G2.1 La radiazione solare 355
G2.2 Tecnologia della conversione fototermica dell'energia solare 361
G2.3 Tecnologia della conversione fotovoltaica dell'energia solare 364
Studio di un caso 370
Formulario essenziale 371
Unità in breve 371
Autoverifica dell'apprendimento 373

UNITÀ G3

CELLE A COMBUSTIBILE 374

G3.1 Caratteristiche della cella a combustibile 375
G3.2 L'idrogeno 377
G3.3 Il funzionamento della cella a combustibile 377
G3.4 Principali tipologie di celle a combustibile 378
G3.5 Applicazione della fuel cell per impianti termici di uso civile, industriale e per i veicoli 381

G3.6 Prospettive della fuel cell negli orientamenti della politica energetica europea 384
Studio di un caso 385
Unità in breve 386
Autoverifica dell'apprendimento 387

UNITÀ G4

TEMPERATURA, CALORE E COMBUSTIBILI 388

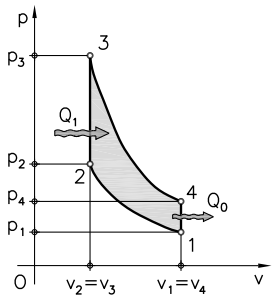
G4.1 La natura del calore 389
G4.2 La temperatura e il calore 390
G4.3 La trasmissione del calore 392
G4.4 La combustione 397
G4.5 Tipi di combustibile 400
Studio di un caso 405
Formulario essenziale 406
Unità in breve 406
Autoverifica dell'apprendimento 408
Verifica di Modulo 409

MODULO H

Termodinamica e sue applicazioni 410

Verifica prerequisiti 411

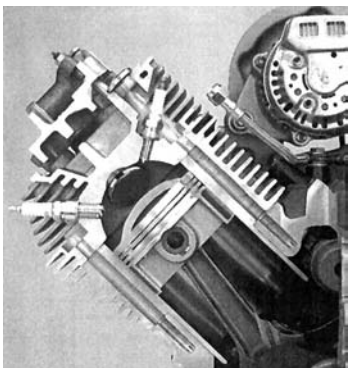
UNITÀ H1



PRINCIPI DI TERMODINAMICA, GENERATORI DI CALORE E MACCHINE FRIGORIFERE 412

H1.1 Le leggi dei gas 413
H1.2 Le trasformazioni fondamentali dei gas ideali 415
H1.3 Il Primo e il Secondo principio della Termodinamica 418
H1.4 Il ciclo di Carnot e i principali cicli ideali 420
H1.5 Termodinamica del vapore acqueo 425
H1.6 I generatori di calore e i compressori 428
H1.7 Macchine frigorifere 435
Studio di un caso 439
Formulario essenziale 441
Unità in breve 442
Autoverifica dell'apprendimento 444

UNITÀ H2



MOTORI ENDOTERMICI ED ESOTERMICI 446

H2.1 Principi di funzionamento dei motori endotermici ed esotermici 447
H2.2 Le macchine termiche a combustione interna 447
H2.3 Architettura dei motori endotermici alternativi 449
H2.4 Classificazione e modalità di funzionamento dei motori endotermici alternativi 453
H2.5 Prestazioni e consumi dei motori endotermici 458
Studio di un caso 462
Formulario essenziale 464
Unità in breve 464
Autoverifica dell'apprendimento 466
Verifica di Modulo 467

PREFAZIONE

Lo scopo principale dell'opera è di fornire agli studenti uno strumento versatile e moderno, in grado di guidarli in modo agevole ed esauriente all'interno del mondo della meccanica e delle macchine termiche; il percorso didattico si snoda attraverso numerose *Unità Didattiche*, seguendo un itinerario formativo graduale e progressivo, che parte dalle conoscenze di base per poi affrontare gli aspetti più caratterizzanti delle discipline e quelli più pratici e applicativi.

Il testo fornisce inoltre una panoramica sul problema energetico italiano, europeo e mondiale (affrontato in un modulo specifico), prestando particolare attenzione al solare e all'idrogeno, applicazioni di sicuro sviluppo nel prossimo futuro.

I contenuti previsti dai Programmi Ministeriali sono ripartiti in otto *Moduli* indipendenti, strutturati in *Unità Didattiche*, a loro volta organizzate in modo da consentire lo sviluppo delle tematiche proposte secondo una logica sequenziale, personalizzabile in base alle esigenze delle singole classi e alle necessità lavorative espresse dalla realtà territoriale in cui opera ogni singolo Istituto.

Lo studente è introdotto alla lettura del singolo modulo con una presentazione sintetica cui seguono due brevi elenchi riportanti i principali prerequisiti (indispensabili per poter affrontare gli argomenti che seguiranno) e gli obiettivi da raggiungere, in termini di conoscenze, capacità e competenze. Segue una pagina dedicata alla verifica dei prerequisiti, da effettuarsi rispondendo ad alcuni quesiti in forma di prova strutturata, con domande a risposta rapida.

Le Unità Didattiche iniziano con una breve introduzione ai contenuti, seguita dagli obiettivi da conseguire e dall'indice dei paragrafi, i cui titoli rimandano direttamente ai contenuti trattati. Dopo lo sviluppo delle tematiche, l'unità offre al lettore quattro rubriche conclusive:

— lo *Studio di un caso*, che prevede la presentazione di un problema, la sua analisi e l'esposizione pratica della procedura completa per la soluzione;
— il *Formulario essenziale*, che consiste nella raccolta delle principali formule illustrate nell'unità, a cui sono affiancate le unità di misura delle grandezze fisiche che vi compaiono;
— l'*Unità in breve*, un riassunto dei contenuti per facilitare lo studente in fase di ripasso;
— l'*Autoverifica dell'apprendimento*, che comprende problemi a risposta rapida e domande in forma di prova strutturata per verificare quanto appreso in seguito allo studio dell'unità.

Il modulo, infine, si chiude con una verifica di carattere operativo.

Nella stesura dei contenuti gli autori si sono prefissati lo scopo di sviluppare le tematiche puntando sugli aspetti fondamentali, adottando un linguaggio semplificato e diretto, cercando di presentare anche gli argomenti più ardui in modo chiaro e scorrevole. Lo sviluppo dei contenuti è accompagnato da esempi numerici risolti e commentati, nei quali è posto in grande evidenza l'uso corretto delle unità di misura. Nel testo si evidenziano richiami e osservazioni il cui scopo è di alleggerire la trattazione contenutistica, invitando il lettore a una piccola pausa di riflessione. Tutte le figure sono accompagnate da didascalie, evidenziate in modo da dare visibilità e immediatezza ai disegni, agli schemi e alle fotografie riportate; nelle intenzioni degli autori le immagini rivestono non solo un importante ruolo di chiarimento, ma costituiscono anche una forma di ripasso, aiutando nella memorizzazione dei concetti più significativi grazie alla forza dell'immagine visiva.

Le parole chiave della letteratura tecnica del settore sono poste in risalto a conclusione di ogni paragrafo e tradotte in inglese, francese e tedesco.

Il **Modulo A** affronta la **Statica**, con particolare attenzione a forze e momenti agenti sui corpi e alle geometrie delle masse dei solidi.

Il **Modulo B**, dedicato alla **Cinematica**, presenta le leggi del moto del punto e del corpo.

Il **Modulo C** sviluppa la **Dinamica**, descrivendo il comportamento dei corpi (supposti in questo caso indeformabili), sottoposti a forze e momenti che causano variazioni di moto.

Il **Modulo D** presenta la **resistenza dei materiali**, analizzando i vari stati di sollecitazione cui sono sottoposti i corpi solidi quando subiscono l'azione di forze e momenti agenti dall'esterno.

Il **Modulo E** descrive i principali **organi meccanici** che compongono macchinari e impianti, alla luce dei loro principi di funzionamento, delle applicazioni pratiche e delle diverse modalità operative.

Il **Modulo F** affronta la meccanica dei fluidi attraverso l'**Idraulica** e le sue leggi, per poi passare alla presentazione delle principali macchine idrauliche e dei loro campi di applicazione.

Il **Modulo G** è dedicato all'**Energetica**: dopo una presentazione degli scenari attuali e delle probabili linee di tendenza future unitamente alle problematiche di tipo ambientale, vengono descritte due tecnologie energetiche innovative caratterizzate da grandi potenzialità di crescita, ovvero, le celle a idrogeno e l'energia solare.

Il **Modulo H** analizza il vasto campo delle **macchine termiche**: dopo una sintetica presentazione delle leggi della Termodinamica si affronta lo studio degli impianti termici e dei loro principali componenti, passando infine al settore dei motori endotermici alternativi illustrati più dettagliatamente.

Gli autori ringraziano anticipatamente quanti vorranno fare loro pervenire, attraverso l'Editore, osservazioni, critiche e suggerimenti atti a migliorare il testo.

G. Anzalone P. Bassignana G. Brafa Musicoro

UN TESTO PIÙ RICCO E SEMPRE AGGIORNATO

Alla pagina web **www.hoeplieditore.it/4223-4** sono disponibili:

- **materiali didattici** integrativi;
- eventuali **aggiornamenti** del testo;
- un **estratto esemplificativo del volume** in formato PDF che può essere consultato, scaricato e stampato.

UNITÀ **B2**

CINEMATICA DEI MOTI COMPOSTI E DEI CORPI RIGIDI

La presente unità affronta lo studio del moto di un punto materiale o di un corpo rispetto a un altro, anch'esso in movimento; in altre parole, si esamina il **moto composto** di un corpo soggetto all'azione contemporanea di due o più moti. L'analisi dei moti composti si esegue limitatamente ai casi di composizione di due **moti rettilinei uniformi** (**moto parabolico** e **moto elicoidale**). Si analizza poi un particolare moto periodico, detto **moto armonico**.

L'unità si chiude con lo studio del moto dei corpi rigidi limitatamente al caso del moto piano, mediante l'analisi del moto del segmento di riferimento congiungente due punti generici del corpo considerato.

OBIETTIVI

- Analizzare il moto relativo e assoluto di un corpo per determinare le corrispondenti velocità.
- Applicare le leggi che regolano i moti composti.
- Riconoscere le leggi che regolano il moto armonico.
- Analizzare il moto piano dei punti di un corpo rigido per individuare il centro di istantanea rotazione del corpo stesso in una posizione generica.
- Determinare le traiettorie e le velocità dei punti di un corpo rigido in moto piano.

CONTENUTI

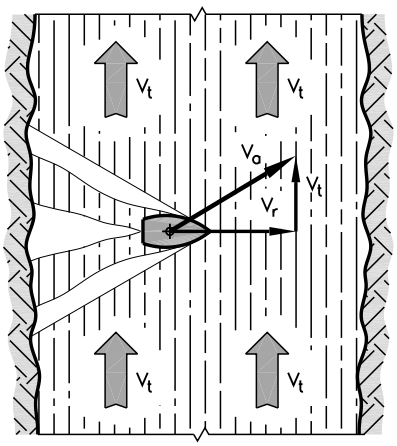
- Moti relativi e moti assoluti.
- Moti composti.
- Moto armonico.
- Moto dei corpi rigidi.
- Moto del corpo rigido parallelamente a un piano fisso.

B2.1 – Moti relativi e moti assoluti

I casi finora esaminati in Cinematica hanno riguardato il moto di un punto materiale rispetto a un generico sistema di riferimento considerato fisso (terna di assi ortogonali). Spesso occorre studiare il moto di un punto materiale (o di un corpo) in funzione di un sistema di riferimento, a sua volta, in movimento rispetto a un altro considerato fisso. Si possono distinguere, quindi, tre tipi di moto, cui corrispondono tre diverse velocità legate tra loro e definite come segue:

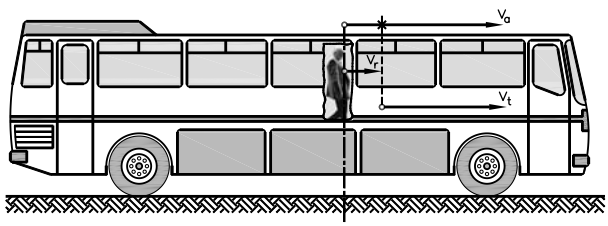
— **velocità assoluta** v_a: velocità del punto mobile rispetto a un sistema di riferimento fisso;
— **velocità relativa** v_r: velocità del punto mobile rispetto a un sistema di riferimento mobile;
— **velocità di trascinamento** v_t: velocità del sistema di riferimento mobile rispetto al sistema di riferimento fisso.

Queste definizioni risultano più chiare se si esaminano alcuni casi reali. Si consideri, per esempio, una barca che attraversa un fiume da una sponda all'altra (▸ ***Fig. B2.1***); la velocità v_r della barca, rispetto alla corrente del fiume (sistema di riferimento mobile), rappresenta la velocità relativa; la velocità v_t della corrente, rispetto alle sponde del fiume (sistema di riferimento fisso), rappresenta la **velocità di trascinamento**; infine la velocità assoluta v_a è rappresentata dalla velocità della barca rispetto alle sponde del fiume.



▲ **Fig. B2.1**
Barca che attraversa un fiume da una sponda all'altra.

Un altro caso è rappresentato da un passeggero che cammina lungo il corridoio di un autobus in movimento: la velocità v_r del passeggero, riferita all'autobus (sistema di riferimento mobile), è quella relativa; la velocità v_t dell'autobus, rispetto al terreno circostante (sistema di riferimento fisso), è quella di trascinamento; infine la velocità del passeggero, rispetto al terreno circostante, rappresenta la velocità assoluta v_a (▸ ***Fig. B2.2***).



▲ **Fig. B2.2**
Passeggero che cammina lungo il corridoio di un autobus in movimento.

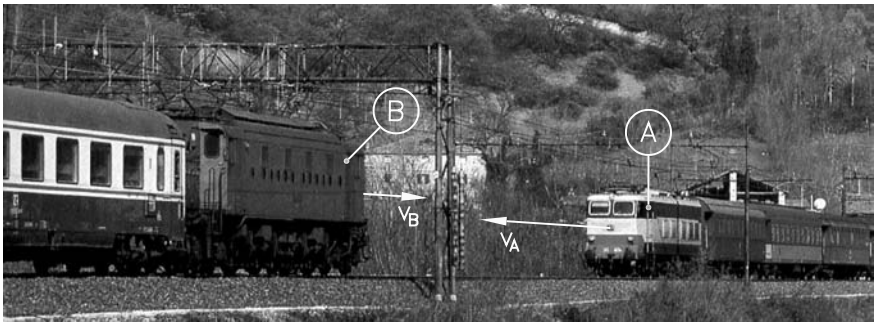
R La **velocità di trascinamento** del sistema mobile, essendo riferita a un sistema fisso, è una velocità assoluta, anche se indicata con un termine diverso.

Dai due esempi descritti si può dedurre la seguente affermazione:

*la **velocità assoluta** v_a di un corpo, nota la sua velocità relativa v_r rispetto a un altro corpo che si muove con una velocità di trascinamento v_t si ottiene come somma vettoriale della velocità relativa con la velocità di trascinamento:*

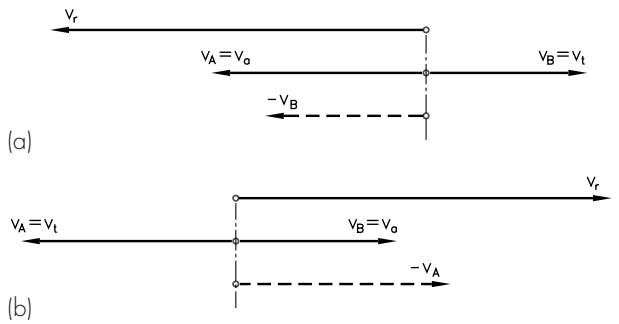
$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t \qquad \textbf{[2.1]}$$

Esempio
Due treni si muovono di moto uniforme, con versi opposti, nella stessa direzione (▸ ***Fig. B2.3***). Indicando con A e B i treni e sapendo che le loro velocità sono rispettivamente v_A = 144 km/h e v_B = 108 km/h, determinare la velocità relativa di un treno rispetto all'altro.



▲ **Fig. B2.3**
Due treni in moto uniforme e verso opposto.

Soluzione
La velocità relativa del treno A rispetto al treno B si ottiene mediante la [*2.1*], sommando al vettore velocità assoluta di A il vettore, uguale e opposto, della velocità del treno B, considerata come velocità di trascinamento, come si può osservare dallo schema rappresentato nella ***figura B2.4***.



▲ **Fig. B2.4**
Rappresentazione vettoriale delle velocità v_A e v_B di due treni: **a)** per determinare la velocità relativa v_r del treno A rispetto al treno B, si considera come velocità assoluta v_a la velocità del treno A e come velocità di trascinamento v_t quella del treno B; **b)** la velocità relativa v_r del treno B rispetto al treno A si determina considerando come velocità assoluta v_a la velocità del treno B e come velocità di trascinamento v_t quella del treno A.

Esprimendo le velocità in m/s si ottengono i seguenti valori:

$$v_A = 144\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e:

$$v_B = 108\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L'intensità della velocità relativa si ricava applicando la [*2.1*]:

$$\overline{v_r} = \overline{v_a} + \overline{v_t} = 40 + 30 = 70\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 252\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Il vettore che rappresenta la velocità relativa ha lo stesso verso del vettore velocità v_A.

La velocità relativa del treno B rispetto al treno A è uguale e opposta a quella precedentemente ricavata (▸ ***Fig. B2.4b***); infatti, la sua intensità vale:

$$v_r = 30 + 40 = 70\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 252\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

e ha il verso del vettore v_B, di conseguenza, i vettori rappresentativi delle due velocità relative, velocità di A rispetto a B e di B rispetto ad A, hanno la stessa intensità ma verso opposto.

Nel moto assoluto, per individuare la traiettoria seguita da un corpo soggetto contemporaneamente a due moti, occorre riferirsi al **principio dell'indipendente coesistenza dei movimenti** di Galileo Galilei, che può essere enunciato nel modo seguente:

un corpo soggetto contemporaneamente a due o più movimenti si trova, in ogni istante, nella posizione che occuperebbe se ciascuno dei movimenti avvenisse, separatamente e successivamente, per la stessa durata di tempo.

La composizione di due o più moti si può effettuare mediante tale principio e le regole della somma vettoriale.

POLIGLOTTA

ITALIANO	INGLESE	FRANCESE	TEDESCO
Velocità assoluta	Absolute speed	Vitesse absolue	Absolutgeschwindigkeit
Velocità relativa	Relative speed	Vitesse relative	Relativgeschwindigkeit
Velocità di trascinamento	Entrainment speed	Vitesse de entreinement	Durchgeschwindigkeit

B2.2 – MOTI COMPOSTI

Di seguito si esaminano alcuni importanti casi di composizione di moti:
— composizione di due moti rettilinei uniformi;
— composizione di un moto rettilineo uniforme e di un moto naturalmente accelerato (moto parabolico);
— composizione di un moto circolare uniforme e di un moto rettilineo uniforme, parallelo all'asse di rotazione (moto elicoidale).

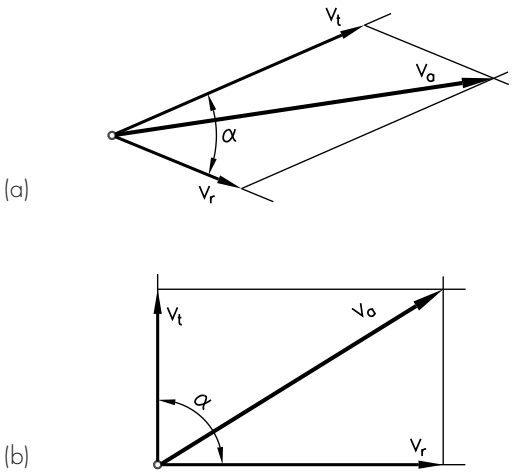
Composizione di due moti rettilinei uniformi

Questo è il caso in cui un punto mobile (oppure un corpo) è soggetto all'azione contemporanea di due moti rettilinei e uniformi, le cui traiettorie hanno direzione coincidente con le rispettive velocità. In riferimento alla ***figura B2.5***, si supponga che i vettori rappresentativi delle velocità dei due moti componenti (velocità relativa v_r e velocità di trascinamento v_t) abbiano direzioni formanti fra loro un angolo α.

La velocità assoluta v_a del corpo, cioè la velocità del moto risultante, si ottiene eseguendo la somma vettoriale delle velocità dei due moti componenti. Il vettore velocità assoluta si ottiene graficamente mediante il **metodo del parallelogramma** e la sua intensità si ricava analiticamente applicando il teorema di Carnot, se $\alpha \neq 90°$ (▸ ***Fig. B2.5a***):

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2 v_r v_t \cos \alpha} \qquad \textbf{[2.2]}$$

Metodo del parallelogramma:
la risultante di due vettori, le cui rette d'azione formano un angolo α, è rappresentata dalla diagonale del parallelogramma avente come lati i due vettori componenti.



▲ **Fig. B2.5**
Rappresentazione di due moti rettilinei uniformi, le cui traiettorie coincidono con le direzioni delle rispettive velocità, relativa e di trascinamento, e che danno origine a un moto risultante la cui velocità è la velocità assoluta: **a)** le traiettorie dei moti componenti e le rispettive velocità formano un angolo $\alpha \neq 90°$; **b)** le traiettorie dei moti componenti e le rispettive velocità formano un angolo $\alpha = 90°$.

Se le direzioni delle velocità dei due moti componenti sono perpendicolari fra loro, ossia $\alpha = 90°$ (▸ ***Fig. B2.5b***), l'intensità della velocità assoluta si ottiene con il teorema di Pitagora:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} \qquad \textbf{[2.3]}$$

Se i due moti componenti hanno stessa direzione e stesso verso ($\alpha = 0$), l'intensità della velocità assoluta è uguale alla somma aritmetica delle intensità della velocità relativa con quella di trascinamento; se hanno stessa direzione e verso opposto ($\alpha = 180°$), l'intensità della velocità assoluta è uguale alla differenza delle intensità della velocità relativa con quella di trascinamento.

Per quanto concerne la traiettoria del moto assoluto, ottenuta mediante il procedimento grafico del parallelogramma, la sua direzione si determina applicando il **teorema dei seni**.

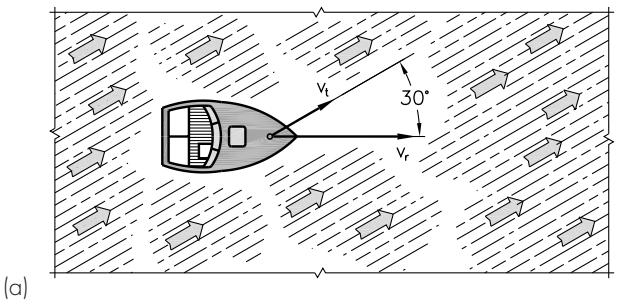
Il **teorema dei seni** afferma che in un triangolo qualsiasi ciascun lato è proporzionale al seno dell'angolo opposto.

OSSERVAZIONE: *dalla* ***figura B2.5*** *si può dedurre e dimostrare per via analitica che il moto assoluto risultante dalla composizione di due moti rettilinei uniformi è anch'esso un moto rettilineo uniforme.*

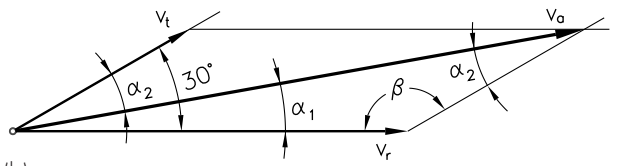
Esempio 1

Un motoscafo naviga alla velocità v_r = 18 nodi ed è soggetto all'azione della corrente del mare che lo trascina trasversalmente, alla velocità v_t = 1,5 nodi, secondo una direzione inclinata di 30° rispetto a quella del motoscafo (▸ ***Fig. B2.6a***).

Determinare l'intensità e la direzione della velocità assoluta v_a del motoscafo e la distanza s percorsa in 30 min.



(a)



(b)

▲ **Fig. B2.6**

a) Rappresentazione delle velocità v_r e v_t di due moti rettilinei uniformi, agenti contemporaneamente su un motoscafo in navigazione. **b)** Rappresentazione vettoriale delle velocità v_a, v_r e v_t.

Soluzione

La velocità del motoscafo costituisce la velocità relativa, valutata rispetto al sistema di riferimento mobile rappresentato dalla corrente; quella della corrente indica la velocità di trascinamento, valutata rispetto al sistema di riferimento fisso; entrambe le velocità sono costanti e quindi i rispettivi moti sono uniformi.

Esprimendo le velocità in m/s, poiché:

$$1 \text{ nodo} = 1 \frac{\text{miglio marino}}{\text{h}} = 0,514 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

si ha:

— la velocità del motoscafo espressa in m/s:

$$v_r = 18 \times 0,514 = 9,252 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

— la velocità della corrente espressa in m/s:

$$v_t = 1,5 \times 0,514 = 0,771 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocità assoluta del motoscafo, vale a dire la velocità rispetto al sistema di riferimento fisso, per la [*2.2*] vale:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2 v_r v_t \cos 30°} =$$

$$= \sqrt{9,252^2 + 0,771^2 + 2 \times 9,252 \times 0,771 \times 0,866} =$$

$$= 9,927 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La direzione della velocità assoluta, ossia la rotta effettiva del motoscafo rispetto alla velocità di trascinamento, si ottiene mediante il teorema dei seni.

Dalla ***figura B2.6b*** si ricava:

$$\beta = 180° - (\alpha_1 + \alpha_2) = 180° - 30°$$

per cui:

$$\frac{v_t}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{v_a}{\text{sen}(180° - 30°)}$$

quindi si ricava:

$$\text{sen } \alpha_1 = v_t \frac{\text{sen}(180° - 30°)}{v_a} =$$

$$= 0,771 \frac{0,5}{9,927} = 0,0388$$

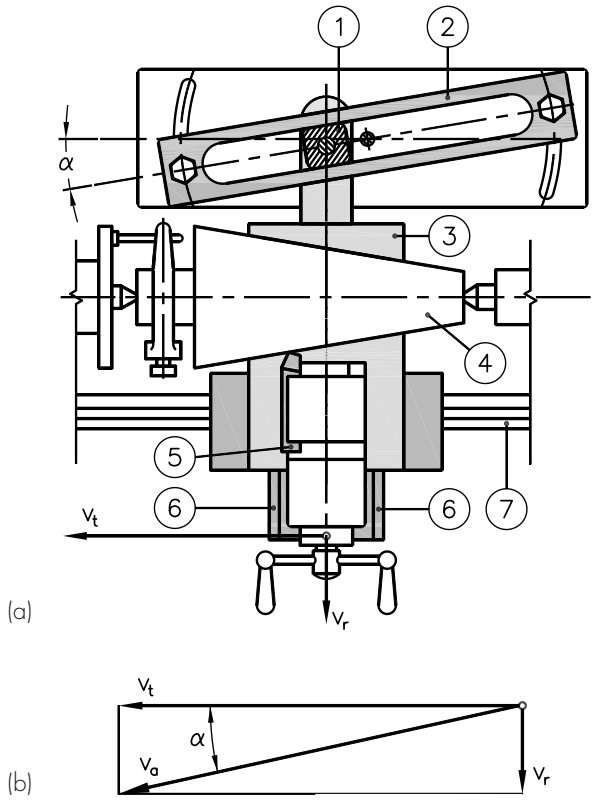
e:

$$\alpha_1 = \text{arc sen } 0,0388 = 2°13'$$

Infine il valore della distanza percorsa dal motoscafo in 30 min, alla velocità assoluta di 9,927 m/s, si ricava mediante la relazione del moto rettilineo uniforme e vale:

$$s = v_a t = 9,927 \times 1800 = 17\,868,6 \text{ m} = 17,868 \text{ km}$$

Esempio 2
Si consideri la torretta portautensili di un tornio durante l'esecuzione di una tornitura conica (▸ ***Fig. B2.7a***).



▲ **Fig. B2.7**
a) Rappresentazione di una tornitura conica, in cui compaiono il pattino (1), la guida del pattino (2), la torretta portautensili (3), il pezzo in lavorazione (4), l'utensile (5), le guide trasversali della torretta (6), le guide longitudinali (7). **b)** Schema vettoriale della composizione delle velocità.

Sapendo che la torretta (3) si muove trasversalmente lungo le guide (6) con velocità v_r = 3,9 mm/min e il carrello su cui è montata la torretta si muove sulle guide longitudinali (7) con velocità v_t = 23,2 mm/min, determinare l'intensità e la direzione della velocità assoluta v_a della torretta portautensili.

Soluzione
Considerando il carrello come sistema di riferimento mobile, la sua velocità costituisce la velocità di trascinamento, valutata rispetto al sistema di riferimento fisso rappresentato dalle guide longitudinali. La velocità della torretta, rispetto alle guide trasversali, rappresenta la sua velocità relativa, cioè, la velocità valutata rispetto al sistema di riferimento mobile (carrello); pertanto, l'intensità della velocità assoluta della torretta, valutata rispetto al sistema di riferimento fisso, per la [*2.3*] vale:

$$v_a = \sqrt{{v_r}^2 + {v_t}^2} = \sqrt{3,9^2 + 23,2^2} = 23,5 \ \frac{\text{mm}}{\text{min}}$$

La direzione della velocità assoluta della torretta è data dall'angolo α (▸ ***Fig. B2.7b***), il cui valore si ottiene dalla seguente relazione trigonometrica:

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_r}{v_t} = \frac{3,9}{23,2} = 0,168$$

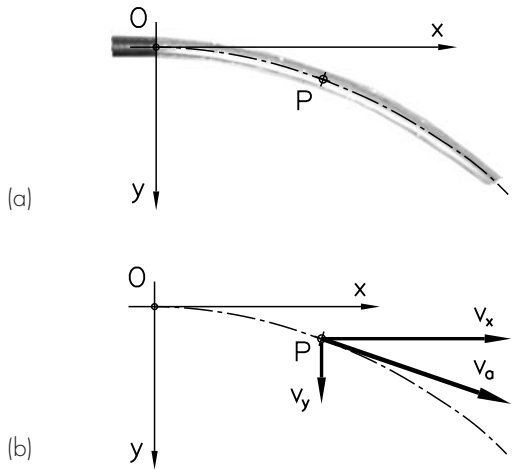
da cui si ricava:

$$\alpha = \text{arc tg } 0,168 = 9°32'$$

OSSERVAZIONE: *un problema analogo a quelli precedenti consiste nella composizione di moti uniformemente accelerati. Essendo possibile eseguire la composizione vettoriale sia sui vettori rappresentativi delle velocità sia sui vettori che rappresentano le accelerazioni, proporzionali alle velocità stesse, basta sostituire nella [2.3] e nella [2.4] le velocità con le rispettive accelerazioni.*

Composizione di un moto rettilineo uniforme orizzontale e di un moto naturalmente accelerato (moto parabolico)

Si consideri inizialmente il moto rettilineo uniforme orizzontale. Osservando, per esempio, un getto d'acqua sotto pressione che esce da una tubazione orizzontale, si vede che esso presenta una traiettoria curvilinea (▸ ***Fig. B2.8***). Il getto d'acqua è sottoposto alla spinta d'uscita (**moto rettilineo uniforme**) in direzione orizzontale e all'azione della forza di gravità (**moto naturalmente accelerato**) secondo la verticale.

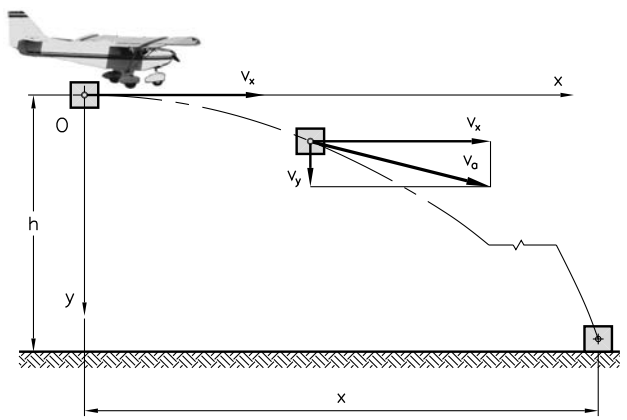


▲ **Fig. B2.8**
a) Getto d'acqua che fuoriesce da un tubo orizzontale.
b) Rappresentazione della traiettoria e della velocità del moto risultante dalla composizione di un moto rettilineo uniforme orizzontale con un moto naturalmente accelerato verticale in un punto P.

Il moto rettilineo uniforme avviene a velocità costante e gli spazi percorsi sono proporzionali ai tempi, mentre il moto naturalmente accelerato presenta accelerazione costante (accelerazione di gravità) e spazi percorsi proporzionali ai quadrati dei tempi. Il moto risultante dalla composizione di questi due moti è un **moto parabolico**.

La velocità assoluta si ricava dalla somma vettoriale delle velocità componenti ed è sempre tangente alla traiettoria stessa (▸ ***Fig. B2.8b***):

$$v_a = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{{v_x}^2 + (g\,t)^2} \qquad \textbf{[2.4]}$$



▲ **Fig. B2.9**
Rappresentazione del moto parabolico di un corpo lanciato da un aereo che si muove di moto rettilineo uniforme orizzontale.

Esempio
Un aereo vola a 1000 m a una velocità costante di 50 m/s (▸ ***Fig. B2.9***). Supponendo che dall'aereo venga lasciata cadere una cassa, calcolare, in assenza di attrito, dopo quanto tempo e a quale distanza dal punto di lancio la cassa toccherà terra e qual è il valore della velocità assoluta con cui la cassa arriva al suolo.

Soluzione
L'aereo procede con moto rettilineo uniforme orizzontale, mentre la cassa cade con moto naturalmente accelerato verticale. Con le notazioni dei moti relativi e assoluti, la velocità costante dell'aereo costituisce la velocità di trascinamento ($v_x = v_t$) ed è riferita al suolo, mentre la velocità di caduta della cassa, rispetto all'aereo, rappresenta la velocità relativa ($v_y = v_r$); pertanto, considerando l'effetto del moto rettilineo uniforme e l'effetto del moto naturalmente accelerato, la velocità della cassa rispetto al suolo rappresenta la velocità assoluta v_a. In base al principio dell'indipendente coesistenza dei moti, il tempo impiegato dalla cassa per arrivare al suolo si può ricavare dalla relazione della caduta libera dei gravi:

$$y = \frac{1}{2} g\,t^2$$

e vale:

$$t = \sqrt{\frac{2\,y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000}{9{,}81}} \cong 14{,}3 \text{ s}$$

La cassa toccherà terra alla distanza x dal punto di lancio; tale distanza rappresenta lo spazio percorso dall'aereo, con moto rettilineo uniforme orizzontale, nello stesso tempo di caduta della cassa t = 14,3 s. Essendo la velocità dell'aereo v_t = 50 m/s, si ha:

$$x = v_t\,t = 50 \times 14{,}3 = 715 \text{ m}$$

Applicando la [*2.4*], dalla composizione dei due moti ortogonali, rettilineo uniforme e uniformemente accelerato, si ricava la velocità assoluta v_a con cui la cassa arriva al suolo:

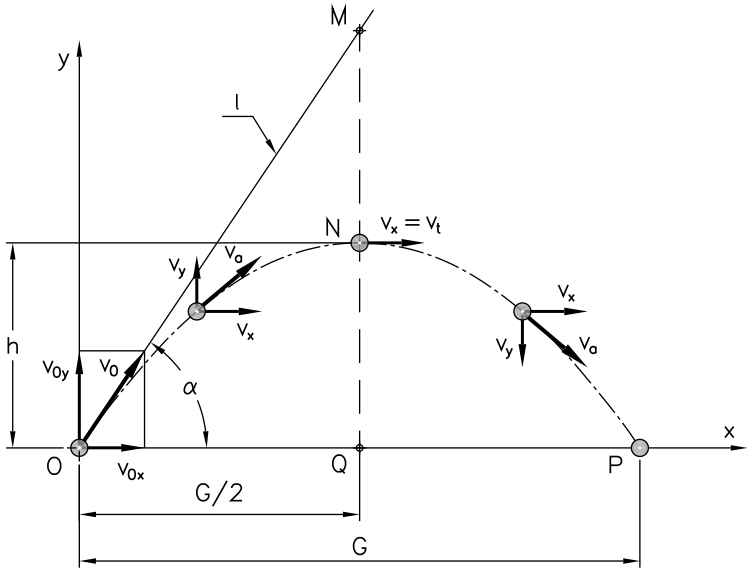
$$v_a = \sqrt{{v_t}^2 + {v_r}^2} = \sqrt{{v_t}^2 + (g\,t)^2} =$$
$$= \sqrt{50^2 + (9{,}81 \times 14{,}3)^2} = 150\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Composizione di un moto rettilineo uniforme con direzione inclinata e di un moto naturalmente ritardato verticale (moto dei proiettili)

Si consideri il caso più generale in cui il moto rettilineo uniforme ha direzione inclinata di un certo angolo rispetto al piano di riferimento. Questo è il tipico moto di un **proiettile** sotto l'azione contemporanea del **moto rettilineo uniforme** e del **moto naturalmente ritardato** verticale. Si suppone inoltre che la sua traiettoria avvenga nel vuoto, ossia, trascurando la resistenza dell'aria e l'eventuale azione del vento.

Il problema può essere così schematizzato: un **proiettile** è lanciato dal punto O lungo una direzione inclinata dell'angolo α rispetto all'orizzontale e con velocità iniziale costante v_0 (▸ ***Fig. B2.10***); determinare i parametri che la caratterizzano.

R Si definisce **proiettile** qualsiasi corpo che possa essere lanciato per mezzo di un congegno atto a conferirgli una velocità iniziale.



▲ **Fig. B2.10**
Rappresentazione del moto dei proiettili: l = linea di tiro; α = angolo di tiro; OP = G = gittata; NQ = h = altezza massima raggiunta dal proiettile; ONP = traiettoria del proiettile; v_x, v_y = componenti orizzontale e verticale della velocità assoluta v_a.

La traiettoria è rappresentata da una parabola ad asse verticale con la concavità rivolta verso il basso e passante per l'origine degli assi cartesiani. La velocità assoluta v_a è data dalla seguente formula:

$$v_a = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + \left(v_{0y} - g\,t\right)^2} \qquad \textbf{[2.5]}$$

Di seguito si riportano alcune definizioni usate in **Balistica** e le relazioni che le contraddistinguono.

— **linea di tiro *l***: direzione lungo cui si effettua il lancio;

— **angolo di tiro** o **di alzata α**: angolo d'inclinazione della linea di tiro rispetto all'orizzontale;

— **gittata *G***: distanza orizzontale OP, fra il punto di lancio e il punto di caduta del proiettile:

$$G = \frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}\,2\alpha \qquad \textbf{[2.6]}$$

— **altezza massima *h***: massima altezza NQ a cui può arrivare il proiettile:

$$h = \frac{v_0^2\,\text{sen}^2\,\alpha}{2\,g} \qquad \textbf{[2.7]}$$

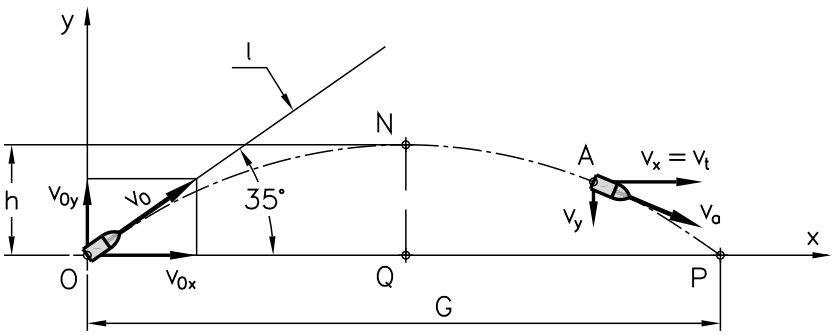
— **tempo di volo *t***, cioè il tempo impiegato dal proiettile a percorrere l'intera traiettoria e raggiungere l'obiettivo:

$$t = \frac{2 v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \qquad \textbf{[2.8]}$$

R La **Balistica** è la scienza che studia il moto dei proiettili, applicata specialmente in artiglieria.

Dalla [*2.4*] si deduce che il proiettile raggiunge la massima distanza orizzontale quando viene lanciato con un angolo di tiro di 45°, a cui corrisponde il valore massimo di sen 2 a, cioè sen 2 a = 1.

Esempio
Un proiettile è lanciato con un angolo di tiro α = 35° (▸ ***Fig. B2.11***). Considerando una velocità iniziale del proiettile di 200 m/s e trascurando la resistenza dell'aria, determinare la velocità del proiettile dopo 20 s dal lancio, la gittata, l'altezza massima raggiunta e il tempo di volo.



▲ **Fig. B2.11**
Rappresentazione del moto di un proiettile lanciato con angolo di tiro α = 35° e con velocità iniziale costante v_0 = 200 m/s.

Soluzione
Le componenti della velocità assoluta del proiettile dopo 20 s dal lancio sono:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 200 \cos 35° = 163{,}83 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e:

$$v_y = v_{0y} - g\,t = v_0 \operatorname{sen} \alpha - g\,t =$$

$$= 200 \operatorname{sen} 35° - 9{,}81 \times 20 = -81{,}48 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Poiché la componente v_y ha valore negativo, il proiettile è in fase di discesa.

Il modulo della velocità assoluta, poi, si ottiene applicando la [*2.5*]:

$$v_a = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + \left(v_{0y} - g\,t\right)^2} =$$

$$= \sqrt{163{,}83^2 + \left(-81{,}48\right)^2} = 183 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La gittata G, per la [*2.6*], vale:

$$G = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen}\, 2\alpha = \frac{200^2}{9{,}81} \operatorname{sen}\, 70° \cong 3831 \text{ m}$$

L'altezza massima raggiunta dal proiettile si determina mediante la [*2.7*]:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{200^2}{2 \times 9{,}81} \operatorname{sen}^2 35° \cong 671 \text{ m}$$

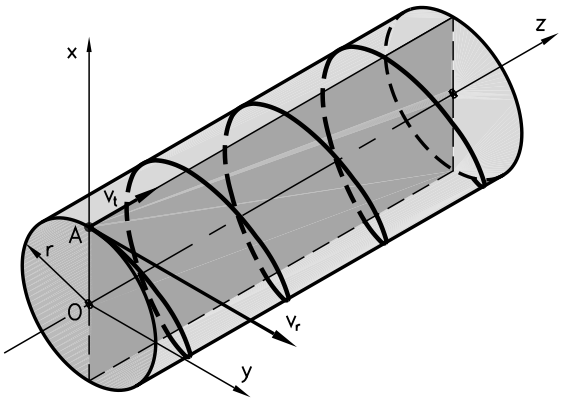
Infine il tempo impiegato dal proiettile per raggiungere l'obiettivo, ossia il tempo di volo, si ricava dalla [*2.8*]:

$$t = \frac{2 v_{0y}}{g} = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\, \alpha}{g} = \frac{2 \times 200 \operatorname{sen} 35°}{9{,}81} = 23{,}38 \text{ s}$$

Composizione di un moto circolare uniforme e di un moto rettilineo uniforme parallelo all'asse di rotazione (moto elicoidale)

I moti composti finora esaminati hanno dato luogo a traiettorie giacenti nel piano; il moto preso in esame in questo paragrafo, invece, dà origine a una traiettoria che si sviluppa nello spazio. Si consideri un punto A posto sul piano O,x,y (▸ ***Fig. B2.12***), sollecitato a muoversi lungo una circonferenza di raggio r con velocità perife-

rica costante v_r e soggetto anche a traslare, contemporaneamente, con velocità costante v_t lungo la direzione normale al piano su cui avviene il moto circolare.



▲ **Fig. B2.12**

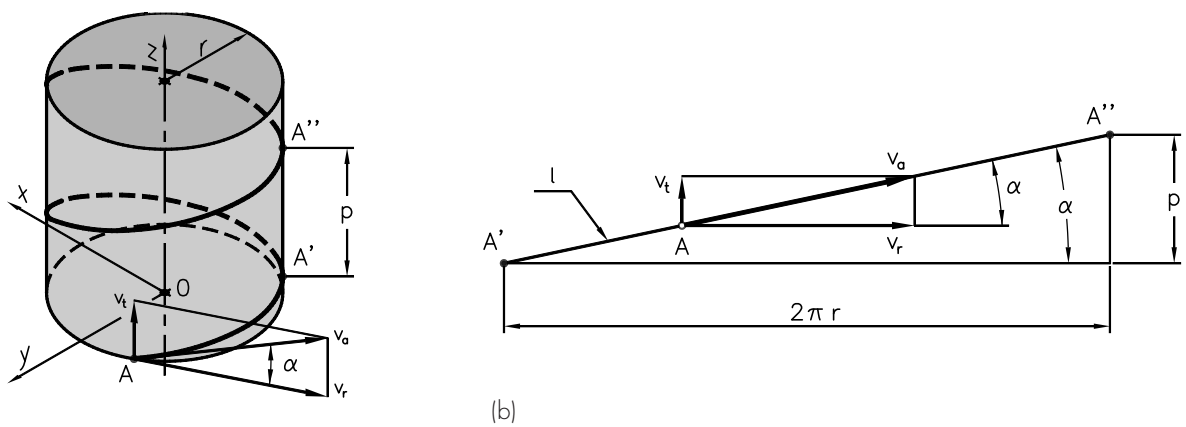
Rappresentazione del moto elicoidale, composto da un moto circolare uniforme e da un moto rettilineo uniforme; v_t = velocità di trascinamento del punto A nella direzione dell'asse z; v_r = velocità relativa del punto A = velocità periferica sulla circonferenza di raggio *r*.

La velocità v_r, considerata come velocità relativa, genera un **moto circolare uniforme**, mentre la velocità v_t, considerata come velocità di trascinamento, genera un **moto rettilineo uniforme**. Poiché i due moti sono entrambi uniformi, anche il moto risultante dalla loro composizione sarà uniforme e descriverà una traiettoria che si evolve lungo una superficie cilindrica, cui si dà il nome di **elica cilindrica** o **elicoide**.

Riferendo la superficie cilindrica, su cui si sviluppa l'elica, a un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, z (▸ ***Fig. B2.13a***), si osserva che a ogni giro descritto dal punto mobile la traiettoria elicoidale si eleva di un tratto *p*.

In pratica il punto mobile A, per effetto del moto di trascinamento, subisce a ogni giro uno spostamento verticale *p* chiamato **passo dell'elica**, per esempio dalla posizione A' alla posizione A'', collocate entrambe sulla stessa generatrice della superficie cilindrica. Sviluppando sul piano del disegno un tratto l dell'elica corrispondente al passo *p*, ovvero a un giro del punto mobile, si osserva che (▸ ***Fig. B2.13b***):

$$p = \left(2\pi r\right) \operatorname{tg} \alpha \qquad \textbf{[2.9]}$$



▲ **Fig. B2.13**

a) Velocità in un moto elicoidale: v_r = velocità relativa, o velocità periferica nel moto di rotazione, disposta tangenzialmente alla circonferenza di raggio *r*; v_t = velocità di trascinamento nella direzione assiale, perpendicolare a v_r; v_a = velocità assoluta, o risultante, rappresentata da un vettore tangente alla traiettoria elicoidale. **b)** Sviluppo nel piano di un tratto di elica corrispondente a un giro del punto mobile A.

Nella [*2.9*] α rappresenta l'angolo d'inclinazione dell'elica, cioè l'angolo che l'elica forma con un piano qualunque normale all'asse della superficie cilindrica.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo di ***figura B2.13b*** si ottiene la lunghezza del tratto di elica corrispondente al passo e coincidente con l'ipotenusa del triangolo stesso mediante la relazione:

$$l = \sqrt{p^2 + 4\pi^2 r^2} \qquad \textbf{[2.10]}$$

In riferimento alla ***figura B2.13a***, il punto A è soggetto a una velocità relativa v_r e a una velocità di trascinamento v_t.

La prima, dovuta al moto circolare uniforme, è tangente alla circonferenza di raggio r e giace nel piano x,y; la seconda, dovuta al moto rettilineo uniforme, è diretta secondo l'asse z e quindi è perpendicolare a v_r.

Dalla somma vettoriale di queste due velocità si ottiene la velocità assoluta v_a, che risulta tangente alla traiettoria elicoidale in ogni istante e quindi inclinata, rispetto al vettore v_r, dell'angolo α (angolo d'inclinazione dell'elica).

Poiché le due velocità v_r e v_t sono perpendicolari fra loro, l'intensità della velocità assoluta v_a vale:

$$v_a = \sqrt{v_r^{\,2} + v_t^{\,2}} \qquad \textbf{[2.11]}$$

nella quale la velocità periferica v_r del moto circolare è espressa in funzione della velocità angolare di rotazione ω mediante la relazione:

$$v_r = \omega\, r \qquad \textbf{[2.12]}$$

mentre la velocità di trascinamento v_t del moto rettilineo uniforme è data da:

$$v_t = v_r \operatorname{tg} \alpha \qquad \textbf{[2.13]}$$

La velocità assoluta v_a si può ricavare anche con la formula:

$$v_a = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{p^2 + 4\pi^2 r^2} \qquad \textbf{[2.14]}$$

Esempio

Su un pezzo cilindrico di diametro d = 100 mm, montato fra le punte di un tornio, si vuole eseguire una traccia elicoidale.

Sapendo che la velocità di rotazione del pezzo è di 60 giri/min e che la velocità di avanzamento dell'utensile è di 0,01 m/s, calcolare il passo, l'inclinazione dell'elica e la velocità assoluta (velocità di taglio) dell'utensile.

Soluzione

La velocità relativa del moto elicoidale (velocità periferica del moto circolare) è data dalla [*2.12*]:

$$v_r = \omega\, r = \frac{\pi\, n\, d}{60} = \frac{\pi\, 60 \times 0{,}1}{60} = 0{,}314\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Poiché la velocità di avanzamento dell'utensile, o velocità di trascinamento v_t, è in relazione alla velocità relativa mediante la [*2.13*]:

$$v_t = v_r \operatorname{tg} \alpha$$

da essa si ricava l'inclinazione dell'elica:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_t}{v_r} = \frac{0{,}01}{0{,}314} = 0{,}031$$

e il valore di α:

$$\alpha = \text{arctg } 0{,}031 = 1°50'$$

Per la [*2.9*] il passo risulta essere:

$$p = (2\,\pi\, r) \operatorname{tg} \alpha = 2\,\pi\, 50 \times 0{,}031 = 9{,}73 \text{ mm}$$

La velocità assoluta dell'utensile, o velocità di taglio, è la velocità con cui il tagliente dell'utensile descrive la traiettoria elicoidale.

Essa si ottiene mediante la [*2.11*]:

$$v_a = \sqrt{v_r^{\,2} + v_t^{\,2}} = \sqrt{0{,}314^2 + 0{,}01^2} \cong 0{,}314\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

OSSERVAZIONE: *essendo il valore di v_t molto piccolo, il valore di v_a risulta prossimo a quello di v_r. Questo giustifica la scelta di assumere come velocità di taglio la velocità periferica del pezzo in rotazione sul tornio (coincidente nell'esempio con la velocità relativa v_r).*

POLIGLOTTA

ITALIANO	INGLESE	FRANCESE	TEDESCO
Moto parabolico	Parabolic motion	Mouvement parabolique	Parabelbewegung
Moto elicoidale	Helicoidal motion	Mouvement hélicoïdal	Schraubbewegung
Gittata	Range	Portée	Tragweite
Elica	Helix	Hélice	Schraube

B2.3 – Moto armonico

I vari moti finora esaminati sono stati considerati ad accelerazione costante. In questo paragrafo si prendono in esame i **moti periodici**, le cui grandezze cinematiche (spazio, velocità e accelerazione), anche se variabili nel tempo, si ripetono identicamente a intervalli regolari di tempo per un numero indeterminato di volte.

In genere i moti alternativi delle macchine, operatrici e motrici, sono moti periodici; tra questi il più semplice è il **moto oscillatorio armonico**, o semplicemente **moto armonico**:

*un punto si muove di **moto armonico** quando percorre, ripetutamente e alternativamente nei due versi, un tratto rettilineo e i suoi spostamenti, rispetto a una posizione di riferimento, variano con legge "sinusoidale".*

Anche le altre due caratteristiche cinematiche, velocità e accelerazione, sono espresse mediante funzioni sinusoidali del tempo.

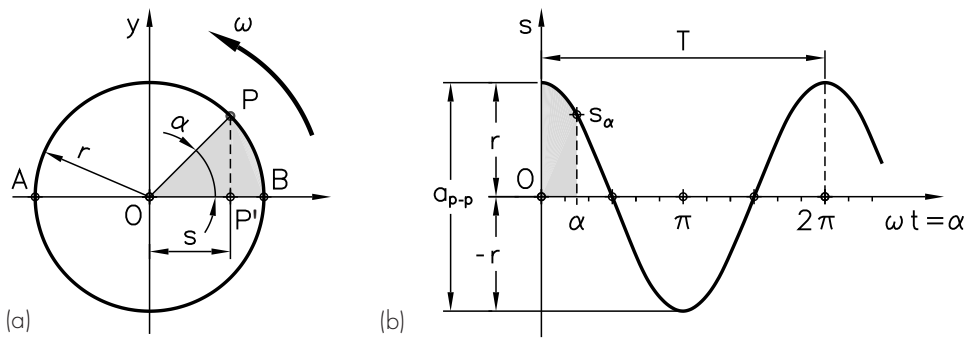
Le equazioni del moto armonico possono essere ottenute considerando la proiezione, lungo un asse diametrale, di un punto dotato di moto circolare uniforme, con velocità angolare ω che, nel moto armonico, è detta **pulsazione** o **frequenza angolare** (▸ ***Fig. B2.14***).

Si riportano di seguito alcune definizioni relative al moto armonico del punto P' e le relazioni che le caratterizzano.

Lo **spazio *s*** percorso nel tempo t sull'asse x (▸ ***Fig. B2.14***).

$$s = r \cos \omega t \qquad \textbf{[2.15]}$$

in cui $\omega t = \alpha$ è l'angolo percorso dal punto P che si muove di moto circolare uniforme, con velocità angolare ω, su una traiettoria circolare di raggio r.



▲ **Fig. B2.14**

a) Rappresentazione della relazione fra il moto circolare uniforme di un punto P e il moto armonico della sua proiezione P' sull'asse x.
b) Diagramma degli spazi nel moto armonico: r = ampiezza del moto armonico; $a_{p\text{-}p}$ = ampiezza picco-picco del moto armonico; ω = pulsazione del moto armonico; T = periodo.

Come si nota dalla [*2.15*] e dalla ***figura B2.14b***, i valori dello spazio s percorso dal punto P' sono compresi, al variare di ωt, fra il valore massimo positivo r e il valore massimo negativo $-r$ e tornano a ripetersi per $\omega t = 2\pi$, cioè a ogni intervallo di tempo uguale al periodo T. Il valore di r rappresenta l'**ampiezza del moto**, cioè il massimo spostamento, positivo o negativo, realizzato dal punto mobile P' ed è uguale alla metà *dell'***ampiezza** dell'**oscillazione** completa, o **ampiezza picco-picco**, $a_{p\text{-}p} = 2\ r$ (distanza fra i due picchi della sinusoide).

Il **periodo *T***, che è l'intervallo di tempo per cui i valori del moto armonico tornano a ripetersi. Si tratta del tempo impiegato dal punto P per compiere un giro completo della traiettoria circolare, ovvero, il tempo impiegato dal punto P' a percorrere due volte il tratto AB per tornare al punto di partenza (**oscillazione** completa o **ciclo**), come rappresentato nelle ***figure B2.14***, ***B2.15***, ***B2.16***.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \textbf{[2.16]}$$

La **frequenza** ***f***, che è il reciproco del periodo, rappresenta il numero di oscillazioni complete compiute in un secondo; essa corrisponde al numero di oscillazioni complete descritte dal punto P' nell'unità di tempo, ma anche al numero di giri descritti dal punto P nell'unità di tempo. La sua unità di misura nel SI è l'hertz [Hz], pari a un'oscillazione al secondo:

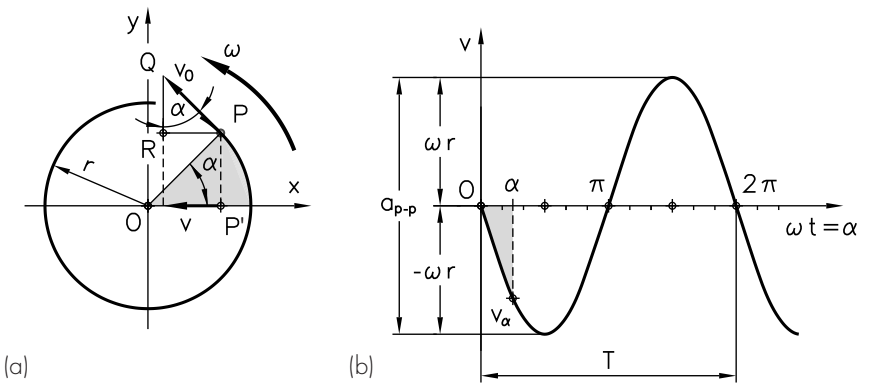
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \textbf{[2.17]}$$

La **velocità istantanea** ***v*** nella direzione dell'asse x (▸ ***Fig. B2.15a***) vale:

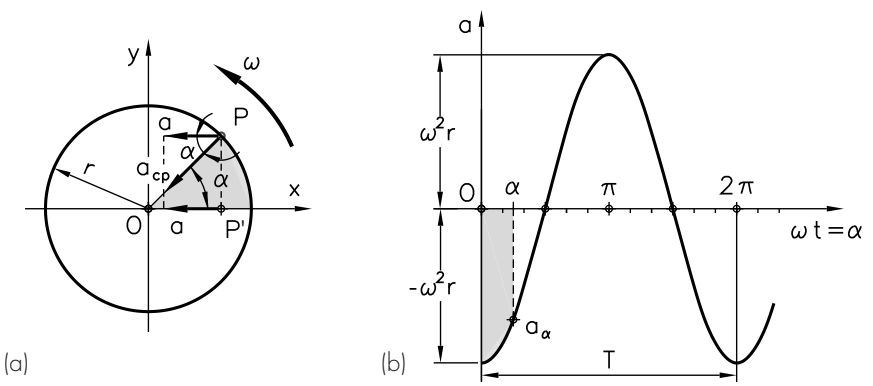
$$v = -\omega r \operatorname{sen} \omega t \qquad \textbf{[2.18]}$$

L'**accelerazione istantanea** ***a*** nella direzione dell'asse x, data dalla componente orizzontale dell'accelerazione centripeta a_{cp} (▸ ***Fig. B2.16a***) è espressa dalla seguente formula:

$$a = -\omega^2 r \cos \omega t \qquad \textbf{[2.19]}$$



▲ **Fig. B2.15**
a) Rappresentazione della relazione fra la velocità del moto circolare e quella del moto armonico: v_0 = velocità periferica del moto circolare del punto P; *v* = velocità del moto armonico del punto P'. **b)** Diagramma della velocità nel moto armonico.

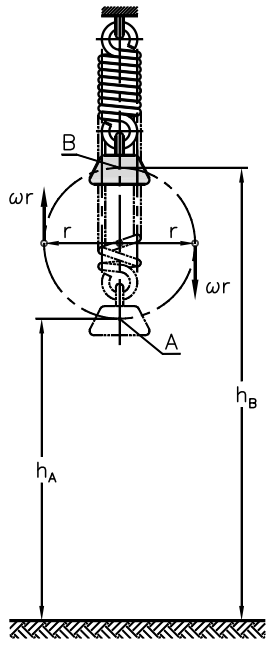


▲ **Fig. B2.16**
a) Rappresentazione della relazione dell'accelerazione centripeta del moto circolare uniforme e del moto armonico: a_{cp} = accelerazione centripeta del punto P in moto circolare; *a* = accelerazione del moto armonico del punto P'. **b)** Diagramma dell'accelerazione nel moto armonico.

OSSERVAZIONE: *il segno di sottrazione nella [2.18] e nella [2.19] tiene conto del fatto che il verso della velocità* ***v*** *e dell'accelerazione* ***a*** *è opposto a quello assunto come positivo per gli spostamenti.*

Esempio
Un corpo sospeso a una molla oscilla verticalmente fra la posizione A, distante h_A = 1 m dal suolo, e la posizione B, distante h_B = 1,5 m dal

suolo (▸ ***Fig. B2.17***). Sapendo che il corpo sospeso raggiunge 25 volte la posizione B in un tempo t = 10 s, determinare la frequenza dell'oscillazione f, la frequenza angolare ω (pulsazione), la velocità massima v_{max} e l'accelerazione massima a_{max} del corpo.



▲ **Fig. B2.17**
Corpo, sospeso a una molla che oscilla fra due posizioni distanti fra loro 0,5 m.

Soluzione
Se il corpo raggiunge 25 volte in 10 s una delle posizioni estreme, la durata di queste oscillazioni, cioè il periodo, è:

$$T = \frac{10}{25} = 0,4 \text{ s}$$

quindi, per la [*2.17*] la frequenza vale:

$$f = \frac{1}{T} = 2,5 \text{ Hz}$$

La frequenza angolare, sempre per la [*2.17*], risulta essere la seguente:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 2,5 = 15,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Poiché la distanza fra le due posizioni raggiunte dal corpo è AB = 0,5 m, e quindi l'ampiezza di oscillazione è r = 0,25 m, la velocità massima del corpo risulta:

$$v_{max} = \omega r = 15,7 \times 0,25 = 3,93 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

mentre l'accelerazione massima vale:

$$a_{max} = \omega^2 r = 15,7^2 \times 0,25 = 61,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

POLIGLOTTA

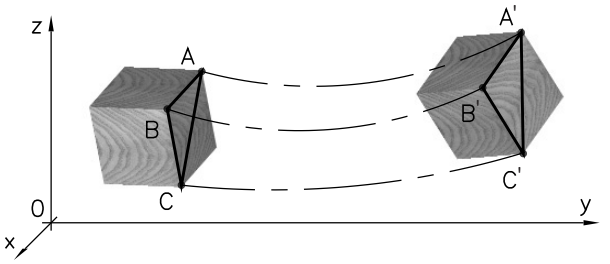
ITALIANO	INGLESE	FRANCESE	TEDESCO
Moto periodico	Periodic motion	Mouvement périodique	Periodische Bewegung
Moto armonico	Harmonic motion	Mouvement harmonique	Harmonische Bewegung
Ampiezza	Amplitude	Amplitude	Amplitüde
Periodo	Period	Période	Periode
Pulsazione	Pulsation	Pulsation	Pulsation
Frequenza	Frequency	Fréquence	Frequenz

B2.4 – MOTO DEI CORPI RIGIDI

*Si definisce **corpo** rigido un sistema di punti collegati fra loro, le cui distanze reciproche sono invariabili.*

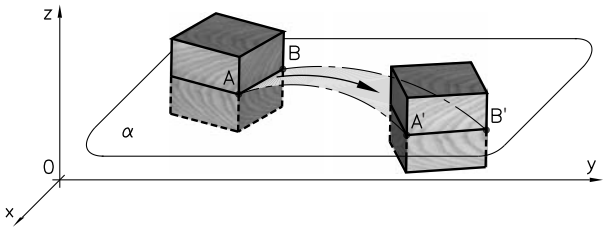
Durante il moto i punti di tale sistema descrivono traiettorie diverse, pertanto il moto del corpo rigido non può più essere studiato mediante le leggi del moto del punto. Si parla, in questo caso, di **Cinematica del corpo rigido**, per di-

stinguere lo studio del moto dei corpi da quello del punto. In generale, un corpo rigido che si muove nello spazio è soggetto a un moto complesso che può essere individuato conoscendo le traiettorie descritte da almeno tre suoi punti non allineati (▸ ***Fig. B2.18***).



▲ **Fig. B2.18**
Moto di un corpo rigido nello spazio: nella rappresentazione di un cubo che si muove nello spazio cambiando posizione è possibile individuare la traiettoria di un punto qualsiasi del corpo se sono note le traiettorie di tre suoi punti non allineati, per esempio, A, B e C.

Tali punti costituiscono il cosiddetto **triangolo di riferimento**, il cui movimento rappresenta quello dell'intero corpo. Lo studio del moto di un corpo rigido nello spazio è complesso, mentre risulta interessante, per le applicazioni tecniche, il moto del corpo rigido che si muove parallelamente a un piano fisso, come il moto dei punti di una puleggia, quello dello stelo di un pistone o quello di una biella. In questo caso si parla di **moto piano del corpo rigido** poiché tutti i suoi punti descrivono traiettorie situate su piani paralleli a un piano fisso di riferimento (▸ ***Fig. B2.19***).



▲ **Fig. B2.19**
Moto di un corpo rigido nel piano: il corpo si muove mantenendo la sua base parallela al piano fisso di riferimento x-y; è possibile individuare la traiettoria di un punto generico del corpo se sono note le traiettorie di due suoi punti qualsiasi, per esempio, A e B.

Per ricavare le leggi del moto basta determinare le traiettorie di due punti qualsiasi del corpo, per esempio A e B, della figura piana ottenuta intersecando il cubo con un piano α qualsiasi parallelo al piano di riferimento. Tali punti costituiscono il **segmento di riferimento** avente lo stesso moto dell'intero corpo. Per semplicità, lo studio della Cinematica del corpo rigido sarà limitato a questo secondo caso, cioè saranno considerati solo i moti piani.

POLIGLOTTA

ITALIANO	INGLESE	FRANCESE	TEDESCO
Triangolo di riferimento	Datum triangle	Triangle de référence	Bezugsdreieck

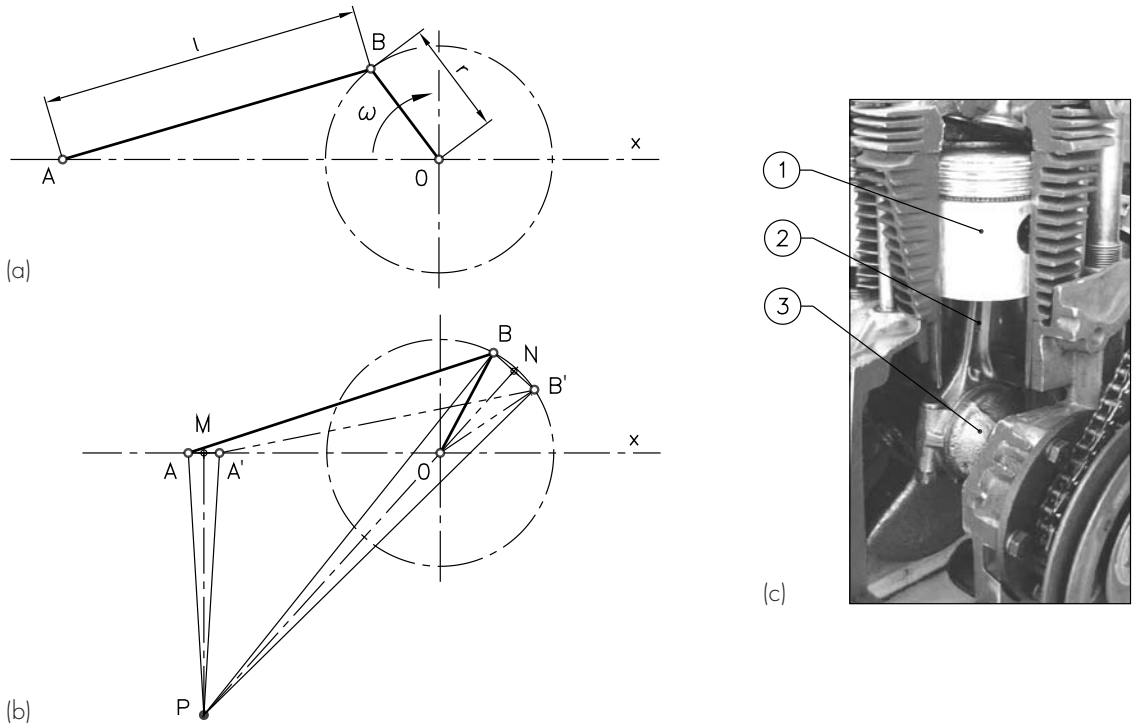
B2.5 – MOTO DEL CORPO RIGIDO PARALLELAMENTE A UN PIANO FISSO

Secondo quanto accennato nel paragrafo precedente, lo studio del moto di un corpo rigido, che si muove **parallelamente a un piano**, può essere ridotto a quello di due suoi punti, ossia allo studio del moto del segmento di riferimento.

Centro di istantanea rotazione

Si consideri, per esempio, la biella AB del **manovellismo di spinta rotativa** rappresentato nella ***figura B2.20a***: esso è costituito dalla biella AB di lunghezza l e dalla manovella OB di lunghezza r.

I punti A e B sono detti, rispettivamente, **piede di biella** e **bottone di manovella**, il punto O rappresenta il perno di banco. Per stabilire la sua posizione nel piano, si fissano due suoi punti, per esempio A e B; in questo modo il moto della biella viene determinato una volta definita la legge del moto dei due punti: il punto B percorre, con moto uniforme, una traiettoria



▲ **Fig. B2.20**

a) Rappresentazione schematica del manovellismo di spinta rotativa. **b)** Costruzione del centro d'istantanea rotazione P della biella AB. **c)** Spaccato di un cilindro di un motore a combustione interna in cui si osservano il pistone (1), la biella (2) e la manovella (3).

circolare di centro O e raggio *r*, mentre il punto A si muove con moto rettilineo alternativo lungo un segmento della retta x passante per O e per A. Si supponga che la biella dopo un intervallo di tempo brevissimo passi dalla posizione AB alla posizione A'B' (▸ ***Fig. B2.20b***); poiché l'intervallo di tempo considerato è molto piccolo, le traiettorie BB' e AA' possono essere considerate entrambe segmenti di retta, i cui assi, condotti dai punti di mezzo M e N, si intersecano nel punto P.

Il **manovellismo di spinta rotativa**, o **meccanismo biella-manovella** (▸ ***Fig. B2.20***), converte il moto rettilineo alternativo del pistone in moto rotatorio continuo o viceversa. È costituito da due aste rigide, la biella e la manovella, collegate fra loro da cerniere, ed è utilizzato in macchine motrici e operatrici che hanno organi dotati di moto alternativo, come i motori endotermici, le pompe e i compressori alternativi.

Con semplici considerazioni geometriche si può dimostrare che i due triangoli ABP e A'B'P sono uguali; ciò vuol dire che, nell'intervallo di tempo considerato, il triangolo ABP (quindi anche il lato AB rappresentante la biella) ruota attorno al suo vertice P: tale punto è detto **centro di istantanea rotazione**.

*Si definisce **centro di istantanea rotazione** il punto attorno al quale, a ogni istante, ruota un corpo rigido che si muove parallelamente a un piano fisso. Esso è determinato dall'intersezione delle perpendicolari alle traiettorie di due punti del corpo stesso nell'istante considerato.*

Si noti che per intervalli di tempo brevissimi, le posizioni AB e A'B' sono molto vicine e i segmenti AA' e BB' tendono a confondersi con le traiettorie dei punti A e B. Il centro di istantanea rotazione, pertanto, può essere ricavato sia come intersezione degli assi NP e MP dei segmenti BB' e AA' sia come intersezione delle perpendicolari alle traiettorie condotte dalle posizioni dei punti A e B in un dato istante.

Ripetendo la costruzione del centro di istantanea rotazione per diversi intervalli di tempo, cui corrispondono ulteriori spostamenti, si nota che a ogni spostamento del segmento di riferimento corrisponde un nuovo centro di istantanea rotazione; pertanto si può affermare che il moto continuo di un corpo rigido parallelamente a un piano fisso è riconducibile a una serie di rotazioni attorno a successivi centri di rotazione.

OSSERVAZIONE: *se il moto piano di un corpo rigido è puramente traslatorio, il centro di istantanea rotazione si trova all'infinito e il moto può essere studiato applicando le leggi della Cinematica del punto; se il moto è puramente rotatorio, tutti i punti del corpo descrivono traiettorie circolari concentriche il cui centro, comune a tutte, è il centro di istantanea rotazione.*

Un'applicazione molto importante del centro di istantanea rotazione consiste nel ricavare la velocità di traslazione di un estremo del segmento di riferimento, conoscendo la velocità di traslazione dell'altro.

Velocità e traiettoria di un corpo rigido che si muove nel piano

Poiché il **moto di un corpo rigido** è riconducibile, in ogni istante, a una piccola rotazione attorno al centro di istantanea rotazione, valgono le stesse valutazioni fatte sul moto rotatorio, cioè:

— le **traiettorie** dei punti del corpo rigido sono perpendicolari ai segmenti che uniscono i punti stessi al centro di istantanea rotazione;

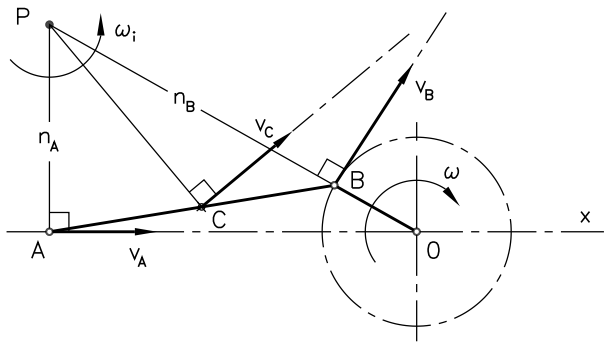
— **tutti i punti** ruotano attorno al centro di istantanea rotazione con la stessa velocità angolare istantanea ω_i;

— le **velocità periferiche** o **tangenziali** v dei punti del corpo rigido sono proporzionali alla loro distanza d dal centro di istantanea rotazione secondo la seguente relazione:

$$v = \omega_i d \qquad \textbf{[2.20]}$$

R L'asse di un segmento è la perpendicolare al segmento stesso, condotta dal suo punto medio.

Dopo aver determinato in ogni istante il centro di istantanea rotazione è possibile ricavare la traiettoria e la velocità di ogni punto del corpo rigido in moto. Prendendo a riferimento sempre la biella AB (▸ ***Fig. B2.21***), il centro di istantanea rotazione P, in un certo istante, è dato dall'intersezione delle perpendicolari n_A e n_B con le traiettorie di due punti qualsiasi, per esempio A e B, della biella.



▲ **Fig. B2.21**
Rappresentazione grafica delle direzioni e dei versi delle traiettorie di tre punti qualsiasi A, B e C della biella del manovellismo di spinta rotativa.

Il punto A si muove con velocità lungo la retta x, mentre il punto B, che percorre con velocità angolare ω la circonferenza di raggio OB e centro O, ha una velocità periferica v_B; di conseguenza, fissato il verso di rotazione della manovella OB, risultano fissati anche i versi degli spostamenti dei punti A e B. Allo stesso modo, è possibile calcolare la direzione della traiettoria di un altro punto C qualsiasi della biella, unendolo con il centro di istantanea rotazione P; la perpendicolare alla congiungente CP condotta da C rappresenta la traiettoria cercata, il cui verso deve essere congruente con quelli di A e B, poiché appartengono allo stesso corpo rigido. Per quanto riguarda le velocità periferiche dei punti A e B, in base alle precedenti considerazioni e alla [*2.20*] si ha:

$$v_A = \omega_i \, \mathrm{AP}$$

e:

$$v_B = \omega_i \, \mathrm{BP}$$

Se si considera un altro punto qualsiasi, per esempio C, si avrà:

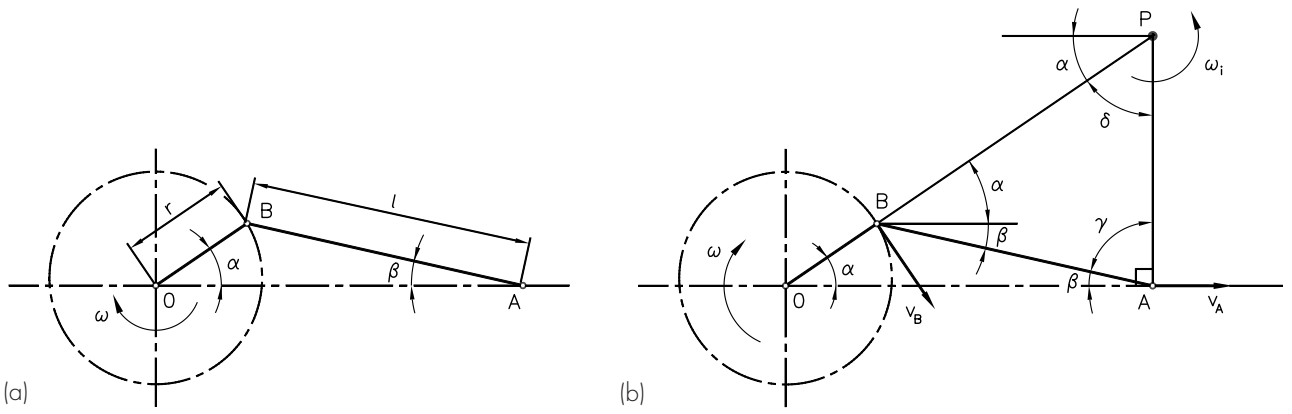
$$v_C = \omega_i \, \mathrm{CP}$$

Dalle relazioni scritte si deduce che le velocità dei vari punti della biella sono proporzionali alla loro distanza dal centro di istantanea rotazione, pertanto, nota la velocità di un punto è possibile determinare quella di un qualsiasi altro punto. Per esempio, nota la velocità v_B del punto B, attraverso la [*2.20*] è possibile calcolare la velocità v_A del punto A:

$$v_A = v_B \frac{\text{AP}}{\text{BP}} \qquad \textbf{[2.21]}$$

Esempio

Dato il meccanismo biella-manovella rappresentato nella ***figura B2.22***, relativamente alla posizione angolare $\alpha = 40°$ della manovella, determinare in modo analitico il valore della velocità angolare istantanea ω_i della biella AB e la velocità istantanea di traslazione v_A del piede di biella A. Il meccanismo ha le seguenti caratteristiche: la lunghezza della biella AB misura $l = 203$ mm; la lunghezza della manovella OB (raggio di manovella) è $r = 76$ mm; la frequenza di rotazione della manovella è $n = 2000$ giri/min.



▲ **Fig. B2.22**

a) Rappresentazione schematica del meccanismo biella-manovella, con la manovella in una posizione angolare generica individuata dall'angolo α: AB = biella; OB = manovella; α = angolo che la manovella forma con la direzione OA; β = angolo che la biella forma con la direzione OA. **b)** Studio cinematico del meccanismo biella-manovella per determinare la velocità del piede di biella: P = centro di istantanea rotazione; $\alpha = 40°$; $\delta = (90° - \alpha)$.

Soluzione

La manovella OB ruota attorno al punto O con la frequenza di rotazione di 2000 giri/min.

Esprimendo la velocità angolare in rad/s, si ottiene la seguente relazione:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi 2000}{60} = 209 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Si ricava la velocità periferica v_B del bottone di manovella B:

$$v_B = \omega r = 209 \times 0{,}076 = 15{,}88 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Applicando il teorema dei seni al triangolo OBA (▸ ***Fig. B2.22a***) è possibile calcolare l'angolo β, formato dalla biella con la direzione orizzontale OA, pertanto si ha:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{l} = \frac{\text{sen } \beta}{r} \qquad \textbf{[2.22]}$$

sostituendo i valori dati si ottiene:

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{sen } 40°}{203} 76 = 0{,}24$$

e:

$$\beta = \text{arcsen } 24 = 13{,}9°$$

Intersecando le rette perpendicolari con le traiettorie dei punti A e B della biella (▸ ***Fig. B2.22b***) si individua il centro di istantanea rotazione P.

Per il teorema dei seni applicato al triangolo BPA, è possibile determinare i valori dei

segmenti BP e AP mediante la relazione:

$$\frac{\text{BP}}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{\text{AP}}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)} = \frac{l}{\text{sen}\,\delta}$$

in cui:

$$\gamma = 90 - \beta = 90° - 13{,}9° = 76{,}1°$$

$$(\alpha + \beta) = 40° + 13{,}9° = 53{,}9°$$

$$\delta = 90° - \alpha = 90° - 40° = 50°$$

pertanto, si ottiene:

$$\text{BP} = \frac{l}{\text{sen}\,50°}\text{sen}\,76{,}1° =$$

$$= \frac{203}{0{,}766}0{,}970 = 257{,}1\ \text{mm}$$

e:

$$\text{AP} = \frac{l}{\text{sen}\,50°}\text{sen}\,53{,}9° =$$

$$= \frac{203}{0{,}766}0{,}807 = 213{,}9\ \text{mm}$$

Per la [*2.20*] si può scrivere:

$$v_B = \text{BP}\,\omega_i$$

in cui ω_i indica la velocità angolare istantanea di B attorno al centro di istantanea rotazione.

Sostituendo i valori noti si ricava:

$$\omega_i = \frac{v_B}{\text{BP}} = \frac{15{,}88}{0{,}2571} = 61{,}8\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Infine, sempre per la [*2.20*], si ricava il valore della velocità istantanea di traslazione v_A del piede di biella A:

$$v_A = \text{AP}\,\omega_\text{i} = 0{,}2139 \times 61{,}8 = 13{,}22\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Poiché le velocità v_A e v_B sono direttamente proporzionali alle loro distanze dal centro di istantanea rotazione P, la velocità v_A del piede di biella poteva essere calcolato anche mediante la [*2.21*]:

$$v_A = v_B\frac{\text{AP}}{\text{BP}} = 15{,}88\frac{0{,}2139}{0{,}2571} = 13{,}22\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

OSSERVAZIONE: *per molte posizioni della biella può non essere facile determinare la misura dei segmenti AP e BP, poiché il centro di istantanea rotazione P tende all'infinito. Con ulteriori considerazioni geometriche, si può ricavare una espressione della velocità v_A del piede di biella dipendente solo dalle grandezze che caratterizzano il meccanismo biella-manovella. L'espressione della velocità del piede di biella diventa:*

$$v_A = \omega r\frac{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\cos\beta} \qquad \textbf{[2.23]}$$

Dove β si può ricavare mediante la [*2.22*]*; con i dati dell'esempio si ha:*

$$v_A = \omega r\frac{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\cos\beta} =$$

$$= 209 \times 76 \times 10^{-3}\frac{\text{sen}(40°+13{,}9°)}{\cos 13{,}9} = 13{,}22\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

POLIGLOTTA

ITALIANO	INGLESE	FRANCESE	TEDESCO
Centro di istantanea rotazione	Rolling point, swing point	Centre de rotation	Lenkdrehpunkt

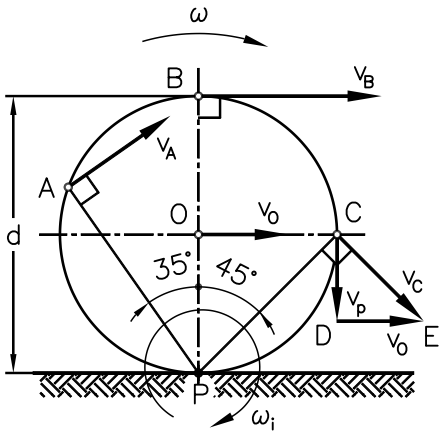
B2 STUDIO DI UN CASO

Un'auto viaggia in autostrada alla velocità v = 120 km/h (▸ ***Fig. B2.23***).

Calcolare il tempo che impiega per superare un autobus lungo 14 m, che procede alla velocità v_t = 100 km/h, se inizia il sorpasso quando si trova a 40 m da esso e rientra nella corsia di marcia dopo averlo sopravanzato di 30 m. Determinare, inoltre, lo spazio percorso durante il sorpasso.

Sapendo che il diametro delle sue ruote misura d = 600 mm, calcolare la velocità di traslazione v_O del centro O di ogni ruota, il numero di giri n delle ruote e la velocità istantanea di traslazione dei punti A, B e C, posti sulla circonferenza esterna della ruota, come si può osservare dallo schema rappresentato nella ***figura B2.23b***.

(a)



(b)

▲ **Fig. B2.23**

a) Auto in movimento. **b)** Rappresentazione della ruota dell'auto in un generico istante: P = centro di istantanea rotazione; ω = velocità angolare della ruota; ω_i = velocità angolare istantanea attorno al centro di istantanea rotazione di tutti i punti della ruota; v_O = velocità di traslazione del centro della ruota; v_A, v_B, v_C = velocità istantanea di traslazione dei punti A, B e C posti sulla circonferenza esterna della ruota; v_p = velocità periferica del generico punto C.

Analisi

Il primo quesito affronta lo studio dei moti composti. Per determinare la velocità relativa v_r dell'auto rispetto all'autobus, si consideri il suo moto assoluto rispetto alla strada con velocità $v_a = v$ e quello dell'autobus come moto di trascinamento con velocità v_t. Per risolvere i quesiti della seconda parte del problema, si tenga presente che il moto di ciascuna ruota dell'auto rappresenta il moto piano di un corpo rigido; pertanto, a ogni istante, il suo spostamento può essere considerato come una piccolissima rotazione attorno a **P**, **centro di istantanea rotazione**. La velocità istantanea di ciascun punto sulla circonferenza esterna della ruota è direttamente proporzionale alla loro distanza dal centro di istantanea rotazione. La velocità v dell'auto è uguale alla velocità di traslazione v_O del centro della ruota e alla velocità periferica v_p della stessa ruota. La velocità angolare ω della ruota attorno al centro O ha lo stesso valore della sua velocità angolare istantanea ω_i attorno al centro di istantanea rotazione.

Procedura consigliata

Per risolvere il problema occorre:

1. riferirsi al ***paragrafo B2.1*** per acquisire i concetti di moto relativo, moto di trascinamento, moto assoluto e le rispettive caratteristiche del moto;
2. riferirsi al ***paragrafo B2.2***, relativo alla composizione di due moti rettilinei uniformi, per determinare la velocità relativa dell'auto (▸ ***Form. 2.1***);
3. riferirsi al ***paragrafo B1.2***, relativo al moto rettilineo uniforme, per calcolare il tempo e lo spazio richiesti;
4. riferirsi al ***paragrafo B1.7***, relativo al moto circolare uniforme, per determinare la velocità angolare ω e il numero di giri n della ruota;
5. riferirsi al ***paragrafo B2.5*** per acquisire i concetti relativi al centro di istantanea rotazione, alla traiettoria e alla velocità istantanea dei punti di un corpo rigido in moto piano;
6. calcolare la velocità istantanea dei punti A, B e C posti sulla circonferenza esterna della ruota mediante la [*2.20*].

Soluzione

Si convertono le velocità in metri al secondo:

$$v = v_a = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{120}{3,6} = 33,33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_t = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{100}{3,6} = 27,78\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Si calcola la velocità relativa v_r con la [*2.1*]:

$$v_r = v_a - v_t = 33,33 - 27,78 = 5,55\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Si determina lo spazio relativo s_r necessario per il sorpasso:

$$s_r = 40 + 30 + 14 = 84\ \text{m}$$

e il tempo t occorrente:

$$t = \frac{s_r}{v_r} = \frac{84}{5,55} = 15,13\ \text{s}$$

Lo spazio assoluto s_a percorso durante il sorpasso vale:

$$s_a = v_a t = 33,33 \times 27,78 = 504,15\ \text{m}$$

Secondo quesito

Il punto P rappresenta il centro di istantanea rotazione. La velocità v_a dell'auto coincide con la velocità periferica della ruota e con la velocità di traslazione v_O del centro della ruota.

Si ha pertanto:

$$v_O = v_p = v = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 33,33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nota la velocità periferica della ruota e il suo raggio, si può determinare la velocità angolare ω:

$$\omega = \frac{v_p}{r} = \frac{33,33}{300} = 111,11\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Dalla relazione:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

si ricava il numero di giri n delle ruote:

$$n = \frac{60\,\omega}{2\pi} = \frac{60 \times 111,11}{2\pi} = 1060,93\,\frac{\text{giri}}{\text{min}}$$

La velocità istantanea di traslazione dei punti A, B e C della ruota può essere determinata moltiplicando la velocità angolare istantanea di rotazione ω_i per la distanza del punto considerato dal centro di istantanea rotazione P.

Poiché la velocità angolare istantanea di rotazione ω_i attorno al punto P è uguale alla velocità angolare ω della ruota stessa, si ottiene:

$$v_A = \omega_i \text{BP} \cos 35° = \omega_i d \cos 35° =$$

$$= 111,11 \times 600 \times 10^{-3} \times 0,819 = 54,61\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_B = \omega_i d = 111,11 \times 600 \times 10^{-3} = 66,67\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

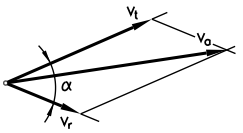
$$v_C = \omega_i \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} =$$

$$= 111,11 \sqrt{\left(\frac{0,6}{2}\right)^2 + \left(\frac{0,6}{2}\right)^2} = 47,14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

OSSERVAZIONE: *le velocità istantanee appena calcolate, come la velocità istantanea di ogni punto sulla circonferenza esterna della ruota, possono anche essere calcolate come somma vettoriale della rispettiva velocità periferica con quella di traslazione del centro della ruota.*

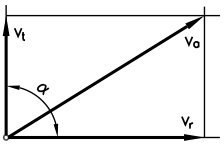
B2 FORMULARIO ESSENZIALE

Velocità assoluta di un corpo soggetto a due moti rettilinei uniformi, le cui traiettorie formano un angolo $\alpha \neq 90°$



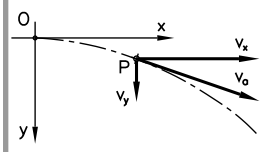
$$v_a = \sqrt{v_r^{\,2} + v_t^{\,2} + 2 v_r v_t \cos \alpha}$$

Velocità assoluta di un corpo soggetto a due moti rettilinei uniformi, le cui traiettorie formano un angolo $\alpha = 90°$



$$v_a = \sqrt{v_r^{\,2} + v_t^{\,2}}$$

Velocità assoluta di un corpo soggetto a un moto rettilineo uniforme orizzontale e a un moto naturalmente accelerato verticale

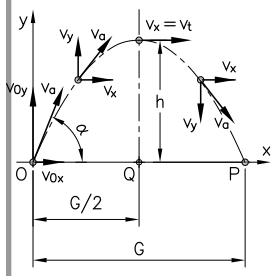


$$v_a = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \sqrt{v_x^{\,2} + (g\,t)^2}$$

v_x = velocità del moto rettilineo uniforme orizzontale [m/s]
$v_y = g\,t$ = velocità del moto naturalmente accelerato verticale [m/s]
g = accelerazione di gravità [m/s^2]
t = tempo [s]

Velocità assoluta di un corpo soggetto a un moto rettilineo uniforme, la cui traiettoria forma un angolo α con l'orizzontale, e a un moto naturalmente ritardato verticale (moto dei proiettili)

Gittata G, altezza massima h e tempo di volo t nel moto dei proiettili



$$v_a = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \sqrt{v_x^{\,2} + (g\,t)^2}$$

v_{0x} = componente orizzontale della velocità del moto rettilineo uniforme [m/s]
$v_{0y} - g\,t$ = velocità del moto naturalmente ritardato verticale [m/s]
g = accelerazione di gravità [m/s^2]

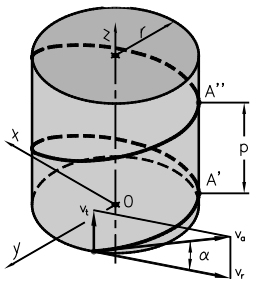
$$G = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha \quad h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

$$t = \frac{2 v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

t = tempo [s]
g = accelerazione di gravità [m/s^2]
v_0 = velocità iniziale del proiettile [m/s]
α = angolo di tiro

Velocità assoluta di un corpo soggetto a un moto circolare uniforme e a un moto rettilineo uniforme parallelo all'asse di rotazione (moto elicoidale)

Passo dell'elica p

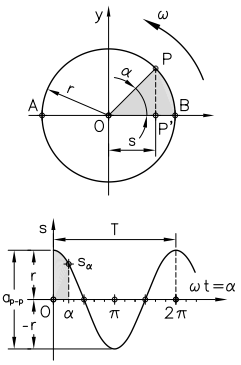


$$v_a = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{p^2 + 4\pi^2 r^2}$$

ω = velocità angolare di rotazione [rad/s]
r = raggio della traiettoria circolare [mm]
p = passo dell'elica [mm]

$$p = (2\,\pi\,r)\ \mathrm{tg}\ \alpha$$

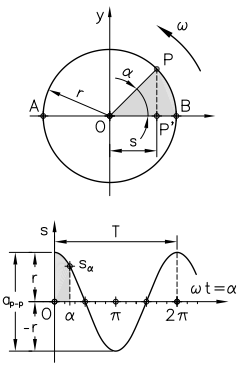
Equazione degli spazi del moto armonico



$$s = r \cos \omega t$$

$\alpha = \omega t$
s = spazio [m]
ω = pulsazione [rad/s]
r = ampiezza del moto [m]
t = tempo [s]

Periodo e frequenza



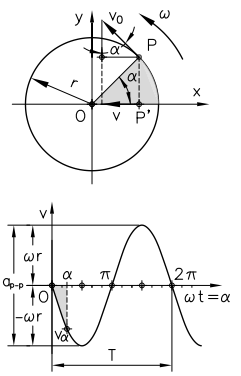
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{s}{a}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

T = periodo [s]
f = frequenza [Hz]
s = spazio [m]
a = accelerazione [m/s^2]

Equazione della velocità del moto armonico

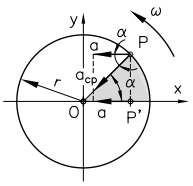


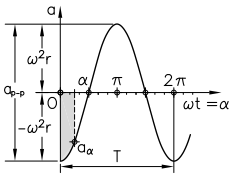
$$\alpha = \omega t$$

$$v = -\omega r \operatorname{sen} \omega t$$

v = velocità del moto armonico [m/s]
ω = pulsazione [rad/s]
r = ampiezza del moto [m]

Equazione dell'accelerazione del moto armonico





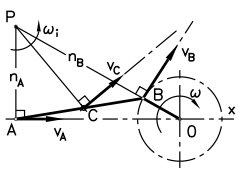
$$a = -\omega^2 r \cos \omega t$$

ω = pulsazione [rad/s]
r = ampiezza del moto [m]
a = accelerazione del moto armonico [m/s^2]

Velocità istantanea di traslazione di un punto di un corpo rigido

Determinazione grafica del centro di istantanea rotazione per una posizione generica di un corpo rigido rappresentato, in questo esempio, dalla biella del manovellismo di spinta rotativa

Relazione fra le velocità istantanee di traslazione di due punti qualsiasi A e B della biella del manovellismo di spinta rotativa



$$v = \omega_i d$$

v = velocità istantanea di traslazione di ciascun punto di un corpo rigido [m/s];
ω_i = velocità angolare istantanea dei punti di un corpo rigido attorno al centro di istantanea rotazione [rad/s];
d = distanza di ciascun punto del corpo rigido dal centro di istantanea rotazione [m/s]

Il centro di istantanea rotazione P, in un determinato istante, è dato dall'intersezione delle perpendicolari n_A e n_B con le traiettorie di due punti qualsiasi, per esempio, A e B della biella

$$v_A = v_B \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}$$

AP = distanza del punto A dal centro di istantanea rotazione
BP = distanza del punto B dal centro di istantanea rotazione

UNITÀ IN BREVE

Moti relativi e moti assoluti

Se le caratteristiche del moto di un corpo (traiettoria, velocità e accelerazione) vengono riferite a un sistema di riferimento fisso, sono dette *assolute* e anche il **moto** è definito **assoluto** o *reale*; se invece sono riferite a un sistema di riferimento mobile, le caratteristiche del moto e il moto stesso sono detti **relativi**. Il moto del sistema di riferimento mobile, rispetto al sistema di riferimento fisso, prende il nome di **moto di trascinamento** e la sua velocità è detta, appunto, *velocità di trascinamento*. Un corpo soggetto contemporaneamente a due o più movimenti, secondo il **principio dell'indipendente coesistenza dei movimenti**, si trova in ogni istante nella posizione che occuperebbe se ciascuno dei movimenti avvenisse separatamente e successivamente per la stessa durata di tempo. Mediante il suddetto principio e le regole della somma vettoriale, si può effettuare la composizione di due o più movimenti.

Composizione di due moti rettilinei uniformi

Questo è il caso in cui un corpo è soggetto all'azione contemporanea di due moti rettilinei e uniformi, le cui traiettorie coincidono con le rispettive velocità.

Si possono presentare i seguenti casi:

— se le direzioni dei vettori velocità, v_r e v_t, dei moti componenti formano un angolo $\alpha \neq 90°$, allora la velocità assoluta del moto risultante si ricava, analiticamente, mediante il **teorema di Carnot**;

— se le direzioni delle velocità dei due moti componenti sono perpendicolari fra loro ($\alpha = 90°$), la velocità assoluta del moto risultante è data dal **teorema di Pitagora**;

— se le direzioni delle velocità dei due moti componenti hanno lo stesso verso e la stessa direzione ($\alpha = 0°$), l'intensità della velocità assoluta è uguale alla somma aritmetica delle intensità delle velocità v_r e v_t; al contrario, se hanno stessa direzione e verso opposto (cioè $\alpha = 180°$), l'intensità della velocità assoluta è uguale alla differenza delle intensità di v_r e di v_t.

Moto parabolico

È il moto che si ottiene dalla composizione di un moto rettilineo uniforme orizzontale e un moto rettilineo verticale uniformemente accelerato; la sua traiettoria è una parabola.

Moto elicoidale

È il moto originato dalla composizione di un moto circolare uniforme e di un moto rettilineo uniforme. La traiettoria si evolve lungo una superficie cilindrica e prende il nome di **elica cilindrica** o **elicoide**.

Moto armonico

Si definiscono **moti periodici** quei moti le cui grandezze cinematiche, anche se variabili nel tempo, si ripetono a intervalli regolari per un numero indeterminato di volte. Il più semplice di questi è il moto armonico, le cui leggi sono di tipo "sinusoidale". Nel moto armonico il **periodo** T è l'intervallo di tempo per cui i valori del moto tornano a ripetersi. L'inverso del periodo è detto **frequenza** f e rappresenta il numero di oscillazioni complete compiute in un secondo.

Moto del corpo rigido parallelamente a un piano fisso

Nel campo della Meccanica applicata risulta interessante, dal punto di vista delle applicazioni tecniche, il moto del corpo rigido che si muove parallelamente a un piano fisso. Per ricavare le leggi di tale moto basta determinare le traiettorie di due punti qualsiasi del corpo; tali punti costituiscono il **segmento di riferimento**, avente lo stesso moto dell'intero corpo. Limitando la trattazione al caso del moto piano, si può ritenere che il movimento del segmento di riferimento consista in una serie di piccole rotazioni attorno a dei punti detti **centri di istantanea rotazione**.

AUTOVERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

1. Dati due corpi in movimento, note la velocità assoluta v_a di uno dei due e la velocità di trascinamento v_t dell'altro, esprimere la velocità relativa v_r di un corpo rispetto all'altro.

$v_r =$ _____

2. Il moto di un corpo che si muove rispetto a due sistemi di riferimento, uno mobile e l'altro fisso, rispetto al sistema mobile è un moto _____; rispetto al sistema fisso è un moto _____

3. Si consideri un corpo soggetto all'azione contemporanea di due moti rettilinei uniformi e si supponga che le direzioni delle velocità (relativa e di trascinamento) dei due moti formino un angolo diverso da 90°; in tal caso la velocità assoluta del moto risultante si ottiene analiticamente applicando il teorema di Carnot.

Vero ☐ Falso ☐

4. Scrivere la relazione con cui si ricava la velocità assoluta di un corpo soggetto all'azione contemporanea di due moti, le cui velocità siano perpendicolari fra loro.

$v_a =$ _____

5. Il moto parabolico si ottiene dalla composizione di:

a) un moto rettilineo uniforme orizzontale con un moto rettilineo uniforme verticale

b) un moto rettilineo uniforme orizzontale con un moto naturalmente accelerato verticale

c) un moto uniformemente accelerato orizzontale con un moto rettilineo uniforme verticale

d) un moto uniformemente accelerato orizzontale con un moto naturalmente accelerato verticale

6. Scrivere la relazione con cui si determina la velocità assoluta nel caso di un moto parabolico.

$v_a =$ _____

7. Il moto elicoidale si ottiene dalla composizione di un moto _____ con un moto _____; inoltre dà origine a una traiettoria che prende il nome di _____ e giace _____

8. Nel moto armonico il periodo dell'oscillazione è:

a) il tempo impiegato dal punto mobile a compiere un'oscillazione completa

b) il tempo impiegato dal punto mobile a percorrere metà oscillazione completa

c) il numero di oscillazioni complete compiute in un secondo

d) l'ampiezza dell'oscillazione

9. La frequenza corrisponde al numero di periodi nell'unità di tempo.

Vero ☐ Falso ☐

10. L'unità di misura della frequenza è:

a) s b) rad/s

c) cicli/s d) Hz

11. Nel moto circolare uniforme la velocità periferica di un punto mobile è inversamente proporzionale alla sua distanza dal centro di rotazione.

Vero ☐ Falso ☐

12. Un corpo rigido che si muove nello spazio soggetto a un moto complesso si può individuare conoscendo le traiettorie descritte da almeno tre suoi punti non allineati.

Vero ☐ Falso ☐

13. Per ricavare le leggi del moto di un corpo rigido che si muove parallelamente a un piano fisso basta determinare le traiettorie di:

a) un punto qualsiasi del corpo

b) due punti qualsiasi del corpo

c) tre punti allineati del corpo

d) quattro punti non allineati del corpo

14. Spiegare il modo con cui si determina il centro di istantanea rotazione.

_____

_____

_____

_____

15. Il moto continuo di un corpo rigido parallelamente a un piano fisso è riconducibile a una serie di rotazioni attorno a successivi centri di rotazione.

Vero ☐ Falso ☐

16. Le velocità periferiche v dei punti di un corpo rigido che si muove nel piano sono proporzionali alla loro distanza dal _____ secondo la relazione v = _____

17. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono esatte:

a) le traiettorie dei punti di un corpo rigido sono perpendicolari al segmento che unisce i punti stessi al centro di istantanea rotazione

b) le velocità periferiche o tangenziali dei punti di un corpo rigido sono proporzionali alla loro distanza dal centro di istantanea rotazione

c) le velocità periferiche o tangenziali dei punti di un corpo rigido sono inversamente proporzionali alla loro distanza dal centro di istantanea rotazione

d) tutti i punti ruotano attorno al centro di istantanea rotazione con la stessa velocità angolare istantanea ω_i

18. Un battello percorre un lago alla velocità di 6 m/s; sul ponte un passeggero cammina, nello stesso verso del battello, con velocità costante di 0,8 m/s. Determinare la velocità assoluta v_a del passeggero rispetto alla riva del lago e lo spazio percorso s in 25 s:

a) v_a = 6,8 m/s s = 170 m

b) v_a = 6,8 m/s s = 225 m

c) v_a = 8,6 m/s s = 225 m

d) v_a = 8,6 m/s s = 170 m

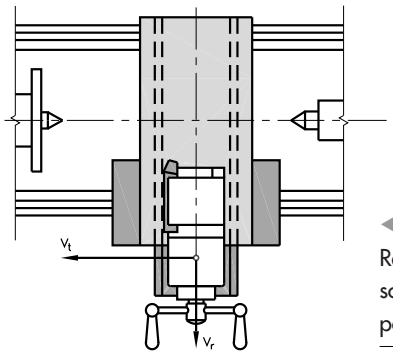
19. La torretta di un tornio si sposta con moto uniforme, alla velocità di 0,5 mm/s, in direzione perpendicolare all'asse del mandrino e, contemporaneamente, viene fatta traslare dal carrello in direzione parallela all'asse del mandrino, con velocità costante di 2,5 mm/s (▸ ***Fig. B2.24***). Determinare la velocità assoluta v_a dell'utensile posto sulla torretta e lo spazio s percorso dall'utensile in 30 s.

a) v_a = 3,25 mm/s s = 95,6 mm

b) v_a = 3,25 mm/s s = 76,5 mm

c) v_a = 2,55 mm/s s = 76,5 mm

d) v_a = 2,55 mm/s s = 95,6 mm



◀ **Fig. B2.24**
Rappresentazione schematica dei carrelli portatorretta di un tornio.

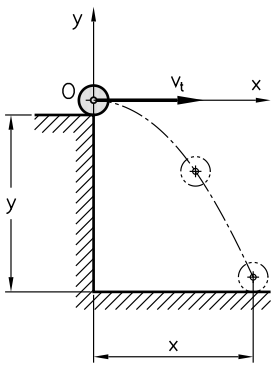
20. Una sfera rotola, con velocità v_t costante, lungo un piano orizzontale posto alla distanza y = 4 m dal suolo (▸ ***Fig. B2.25***). Giunta allo spigolo del piano, la sfera cade e tocca il suolo a una distanza x = 4 m dallo spigolo del piano. Determinare la velocità di trascinamento v_t della sfera e la sua velocità assoluta di arrivo al suolo:

a) v_t = 6,55 m/s v_a = 23,74 m/s

b) v_t = 4,44 m/s v_a = 9,88 m/s

c) v_t = 4,44 m/s v_a = 23,74 m/s

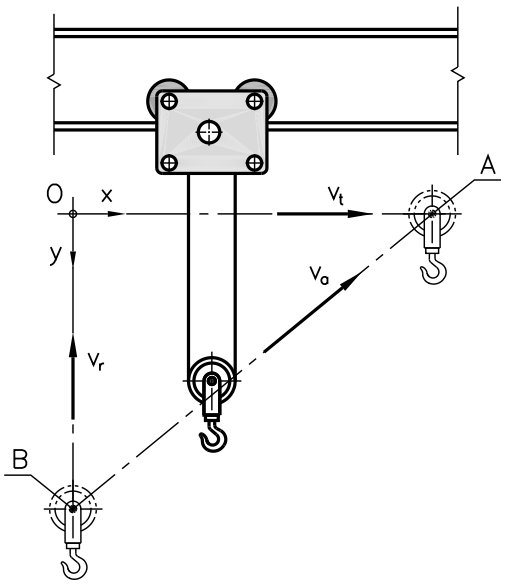
d) v_t = 6,55 m/s v_a = 9,88 m/s



◀ **Fig. B2.25**
Rappresentazione del moto risultante di una sfera che prima rotola su un piano orizzontale con moto rettilineo uniforme e dopo cade con moto naturalmente accelerato.

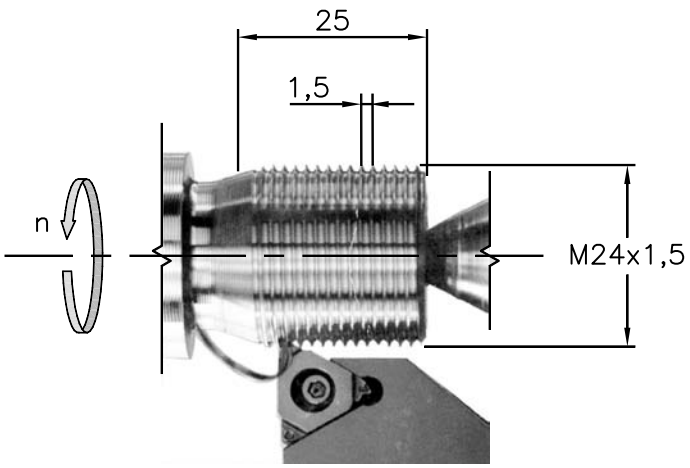
VERIFICA DI MODULO

1. Il gancio di una gru mobile deve sollevarsi di 24 m, con una velocità relativa v_r = 1 m/s (▸ ***Fig. B.1***). Contemporaneamente la gru si sposta sulla monorotaia a una velocità di trascinamento v_t = 0,6 m/s, per portarsi nel punto A a fine manovra. Determinare la velocità assoluta v_a del gancio, il tempo di salita *t* del gancio e la distanza *s* fra l'inizio e la fine della corsa.



▲ **Fig. B.1**
Rappresentazione del moto assoluto del gancio di sollevamento di una gru mobile.

2. Si deve eseguire al tornio una filettatura su un pezzo cilindrico di diametro *d* = 24 mm (▸ ***Fig. B.2***). Il passo della filettatura è *p* = 1,5 mm e il numero di giri del pezzo è *n* = 50 giri/min, calcolare la velocità di taglio v_a dell'utensile e il tempo necessario per eseguire una passata di filettatura.



▲ **Fig. B.2**
Filettatura esterna di un pezzo cilindrico eseguita al tornio: v_t = velocità di taglio; *n* = numero di giri del mandrino.