Esempio 1
Verifica dell'apertura delle fessure

Si considera la sezione rettangolare caratterizzata dalle seguenti proprietà:

- base b = 300 *mm*,
- altezza totale h = 600 *mm*,
- copriferro c =30 *mm*,
- altezza utile d = 570 *mm*,
- lunghezza L = 6 *m*,
- armatura in trazione 4ϕ 14 per un area di acciaio $A_{s1} = 615\ mm^2$
- armatura in compressione 2ϕ 14 per un area di acciaio $A_{s2} = 308\ mm^2$.

Per quanto riguarda i materiali si utilizza un calcestruzzo di resistenza cilindrica caratteristica f_{ck} =20 *MPa*, cui corrisponde una resistenza media a trazione del calcestruzzo, f_{ctm} pari a:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,3 \cdot 20^{2/3} = 2,2\ MPa$$

La resistenza media a flessione si calcola come:

$$f_{ctm,fl} = 1.2 \cdot f_{ctm} = 2,65\ MPa$$

Il modulo elastico del calcestruzzo risulta:

$$E_{cm} = 22000 \cdot (f_{cm}/10)^{0,3} = 22000 \cdot (28/10)^{0,3} = 29936\ MPa$$

essendo $f_{cm} = f_{ck}$ + 8 MPa = 28 *MPa*.

Si considera un acciaio B450C caratterizzato da un tensione di snervamento f_y = 450 *MPa* cui corrisponde un valore di progetto $f_{yd} = f_y/1,15$ = 391 *MP*a, si assume per l'acciaio un modulo elastico E_s = 200000 *MPa*.

I valori caratteristici dei carichi sono di 20 *kN/m* per il permanente e 20 *kN/m* per l'accidentale; considerando una condizione quasi permanente il carico di progetto totale è:
$F_k = G_k + 0,3 \cdot Q_k = 20 + 0,3 \cdot 20 = 26\ kN/m$

Con riferimento ad uno schema di trave semplicemente appoggiata di lunghezza L = 6 *m* il momento flettente massimo in mezzeria è pari a:

$M = F_k \cdot L^2 /8 = 117\ kN\ m$.

In primo luogo si valuta il momento di fessurazione in modo semplificato facendo riferimento alla sola sezione di calcestruzzo:

$$M_{cr} = f_{ctm,fl} \frac{b \cdot h^2}{6} = 2,65 \frac{300 \cdot 600^2}{6} = 47.5\,\text{kNm}$$

da cui si ha:

$$\frac{M_{cr}}{M} = \frac{47.5}{117} = 0.407$$

La tensione nell'armatura in trazione, σ_{s1}, si può calcolare mediante la formula semplificata:

$$\sigma_{s1} = \frac{M}{0,9 \cdot d \cdot A_{s1}} = \frac{117 \cdot 10^6}{0,9 \cdot 570 \cdot 615} = 371 \text{ MPa}$$

Oppure con la formula esatta:

$$\sigma_{s1} = n \frac{M}{I}(d - x) = 15 \frac{117 \cdot 10^6}{2032 \cdot 10^6} \cdot (570 - 149) = 363 \text{ MPa}$$

avendo calcolato l'asse neutro x attraverso l'annullamento del momento statico della sezione parzializzata omogeneizzata e successivamente l'inerzia corrispondente:

$$S_n = 0\text{:}\ \frac{b \cdot x^2}{2} + n \cdot A_{s2} \cdot (x - c) - n \cdot A_{s1} \cdot (d - x) = 0$$

$$\frac{300 \cdot^2}{2} + 15 \cdot 308 \cdot (x - 30) - 15 \cdot 615 \cdot (570 - x) = 0 \ \rightarrow x = 149\ mm$$

$$I_n = \frac{b \cdot x^3}{3} + n \cdot A_{s2} \cdot (x - d')^2 + n \cdot A_{s1} \cdot (d - x)^2$$

$$I_c = \frac{300 \cdot 1049^3}{3} + 15 \cdot 615 \cdot (149 - 30)^2 + 15 \cdot 615 \cdot (570 - 149)^2 \rightarrow I_n = 2032 \cdot 10^6\ mm^4$$

La percentuale di armatura ρ_r risulta:

$$\rho_r = \frac{A_{s1}}{b \cdot \min(2,5 \cdot c; [d - x]/3)} = \frac{615}{300 \cdot 22500} = 0,0274$$

Avendo inoltre fissato:
- $k_1 = 0,8$ barre ad aderenza migliorata;
- $k_2 = 0,5$ per sollecitazione di flessione
- $k_3 = 3,4$; $k_4 = 0,425$; $k_t = 0,4$ per carichi di lunga durata
- $f_{ct,eff} = f_{ctm} = 2,2$ MPa

si ha:

$$s_{r,max} = k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \frac{\phi}{\rho_{p,eff}} = 3,4 \cdot 30 + 0,8 \cdot 0,5 \cdot 0,425 \frac{14}{0.0274} = 189\ mm$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s} - k_t \left[\frac{f_{ct,eff}}{E_s \cdot \rho_{p,eff}} + \frac{f_{ct,eff}}{E_{cm}} \right] = \frac{363}{200000} - 0,6 \cdot \left[\frac{2,2}{200000 \cdot 0.0274} + \frac{2,2}{29936} \right] = 0,00163$$

da cui:

$$w_k = s_{r,max} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = 189 \cdot 0,00163 = 0,307\ mm \approx w_2 = 0,3\ mm$$

Aumentando l'area delle armature in acciaio a 6ϕ 14 e 4ϕ 14 in trazione e compressione si otterrebbe per la stessa sezione e la stessa condizione di carico un'apertura massima delle fessure pari a 0.173 *mm* < w_1 = 0,2 *mm*.

Esempio 2
Verifica di deformabilità a breve termine (t = 0)

Si considera la sezione rettangolare caratterizzata dalle seguenti proprietà:

- base b = 300 *mm*,
- altezza totale h = 600 *mm*,
- copriferro c =30 *mm*,
- altezza utile d = 570 *mm*,
- lunghezza L = 6 *m*,
- armatura in trazione 4ϕ 14 per un area di acciaio A_{s1} = 615 mm^2
- armatura in compressione 2ϕ 14 per un area di acciaio A_{s2} = 308 mm^2.

Per quanto riguarda i materiali si utilizza un calcestruzzo di resistenza cilindrica caratteristica f_{ck} =20 *MPa*, cui corrisponde una resistenza media a trazione del calcestruzzo, f_{ctm} pari a:

$$f_{ctm} = 0{,}3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0{,}3 \cdot 20^{2/3} = 2{,}2\ MPa$$

La resistenza media a flessione si calcola come:

$$\mathrm{f_{ctm,fl}} = 1.2 \cdot \mathrm{f_{ctm}} = 2{,}65\ MPa$$

Il modulo elastico del calcestruzzo risulta:

$$E_{cm} = 22000 \cdot (f_{cm}/10)^{0,3} = 22000 \cdot (28/10)^{0,3} = 29936\ MPa$$

essendo $f_{cm} = f_{ck}$ + 8 MPa = 28 *MPa*.

Si considera un acciaio B450C caratterizzato da un tensione di snervamento f_y = 450 *MPa* cui corrisponde un valore di progetto $f_{yd} = f_y/1{,}15$ = 391 *MP*a, si assume per l'acciaio un modulo elastico E_s = 200000 *MPa*.

Poiché si vuole effettuare una verifica al tempo t = 0, si considera un coefficiente di omogeneizzazione, n, pari all'effettivo rapporto tra i moduli elastici dei materiali:

$$n = E_{cm} / E_s = 29936/ 200000 = 6{,}7$$

Si considera una condizione di carico rara, per cui essendo i valori caratteristici dei carichi pari a 20 *kN/m* per il permanente e 20 *kN/m* per l'accidentale; il carico di progetto totale è:

$$F_k = G_k + Q_k = 20 + 20 = 40\ kN/m$$

Con riferimento ad uno schema di trave semplicemente appoggiata di lunghezza L = 6 *m* il momento flettente massimo in mezzeria è quindi pari a:

$$M = F_k \cdot L^2 /8 = 180\ kN\,m.$$

- *Calcolo delle caratteristiche della sezione non fessurata (Stadio 1):*
Trascurando la differenza tra calcestruzzo teso si calcola la posizione del baricentro della sezione omogeneizzata come $x_1 = S_s/A$, essendo S_s il momento statico della sezione omogeneizzata rispetto al lembo superiore della sezione:

$$x_1 = \frac{Bh^2/2 + nA_{s1} \cdot d + nA_{s2} \cdot d'}{Bh + nA_{s1} + nA_{s2}} = \frac{300 \cdot 570^2 / 2 + 6{,}7 \cdot 615 \cdot 570 + 6{,}7 \cdot 308 \cdot 30}{300 \cdot 600 + 6{,}7 \cdot 615 + 6{,}7 \cdot 308} = 303\ mm$$

L'inerzia della sezione non fessurata è quindi pari a:

$$I_1 = \frac{B \cdot h^3}{12} + B \cdot h \cdot (0.5h - x_1)^2 + n \cdot A_{s2} \cdot (x_1 - d')^2 + n \cdot A_{s1} \cdot (d - x_1)^2$$

$$I_1 = \frac{300 \cdot 570^2}{12} + 300 \cdot 600 \cdot (300 - 303)^2 + 6{,}7 \cdot 615 \cdot (570 - 303)^2 + 6{,}7 \cdot 308 \cdot (303 - 30)^2 =$$
$5848 \cdot 10^6\ mm^4$

Rispetto al valore approssimato dell'inerzia non fessurata $I_1 = \frac{B \cdot h^3}{12}$ = $5400 \cdot 10^6\ mm^4$ si vede che la differenza è minore del 10%, per cui il calcolo del momento di prima fessurazione si può eseguire anche in maniera semplificata facendo riferimento alla sola sezione di calcestruzzo:

$$M_{cr} = f_{ctm,fl} \frac{b \cdot h^2}{6} = 2{,}65 \frac{300 \cdot 600^2}{6} = 47.5\ \text{kN m}$$

da cui si ha: $\frac{M_{cr}}{M} = \frac{47.5}{180} = 0.265$

La freccia in stadio 1 al tempo t = 0 è quindi pari a:

$$\alpha_I = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{E_{cm} \cdot I_1} = \frac{5}{384} \cdot \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 6000^4}{299360 \cdot 5848 \cdot 10^6} = 3{,}9\ mm$$

- *Calcolo delle caratteristiche della sezione fessurata (Stadio 2):*
L'asse neutro della sezione fessurata si calcola mediante l'annullamento del momento statico rispetto al baricentro della sezione parzializzata assumendo n = 6,7:

$$\frac{b \cdot x_2^2}{2} + n \cdot A_{s2} \cdot (x_2 - c) - n \cdot A_{s1} \cdot (d - x_2) = 0$$

$$\frac{300 \cdot x_2^2}{2} + 6{,}7 \cdot 308 \cdot (x_2 - 30) - 6{,}7 \cdot 615 \cdot (570 - x_2) = 0 \ \rightarrow x_2 = 108\ mm$$

L'inerzia della sezione parzializzata si calcola:

$$I_2 = \frac{b \cdot x_2^3}{3} + n \cdot A_{s2} \cdot (x_2 - c)^2 + n \cdot A_{s1} \cdot (d - x_2)^2$$

$$I_2 = \frac{300 \cdot 108^3}{3} + 6{,}7 \cdot 308 \cdot (108-30)^2 + 6{,}7 \cdot 615 \cdot (570-108)^2 \rightarrow I_2 = 1016 \cdot 10^6\ mm^4$$

La freccia in stadio 2 al tempo t = 0 è quindi pari a:

$$\alpha_{II} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{E_{cm} \cdot I_2} = \frac{5}{384} \cdot \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 6000^4}{299360 \cdot 1016 \cdot 10^6} = 22{,}2\ mm$$

Utilizzando la formula applicativa proposta dall'EC2 (2004), la freccia complessiva si calcola come:

$$\alpha = \alpha_I \cdot \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^2 + \alpha_{II} \cdot \left[1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^2\right]$$

essendo: $\left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2 = 0{,}070$

$$\alpha = 3{,}9 \cdot 1 \cdot 0{,}070 + 22{,}2 \cdot 1 \cdot (1 - 0{,}070) = 20{,}9 \text{ mm}$$

ed avendo assunto $\beta = 1$ per carichi di breve durata.

Esempio 3
Verifica di deformabilità a lungo termine

Per effettuare invece la verifica a lungo termine è necessario valutare la freccia tenendo conto della viscosità. Con il metodo EM la procedura è estremamente semplice: si utilizzano le espressioni ed i metodi visti per il calcolo al tempo t=0 semplicemente sostituendo al modulo elastico "istantaneo" E_c quello effettivo $E_{c,eff}$ e dunque al coefficiente di omogeneizzazione istantaneo n quello effettivo $n_{eff}=E_s/E_{c,eff}$.

Per quanto concerne l'influenza della viscosità il fenomeno è introdotto in maniera estremamente semplificata assumendo il valore 0,5 per il coefficiente β.
Si consideri la sezione rettangolare caratterizzata dalle seguenti proprietà:

- base b = 300 *mm*,
- altezza totale h = 600 *mm*,
- copriferro c =30 *mm*,
- altezza utile d = 570 *mm*,
- lunghezza L = 6 *m*,
- armatura in trazione 4ϕ 14 per un area di acciaio $A_{s1} = 615\ mm^2$
- armatura in compressione 2ϕ 14 per un area di acciaio $A_{s2} = 308\ mm^2$.

La valutazione della freccia a lungo termine viene effettuata per la condizione di carico quasi-permanente. Se i valori caratteristici dei carichi sono di 20 *kN/m* per il permanente e 20 *kN/m* per l'accidentale ed assumendo un coefficiente riduttivo ψ_2 = 0,3 per civile abitazione, il carico di progetto totale è:

$$F_k = G_k + 0{,}3 \cdot Q_k = 20 + 0{,}3 \cdot 20 = 26\ kN/m$$

Per la valutazione degli effetti di viscosità si fa riferimento alle tabelle 11.2 delle NTC 2008, assumendo una percentuale di umidità del 55% ed un istante di applicazione dei carichi t_0 = 30 giorni.
Lo spessore fittizio della sezione in esame è:

$$h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{p} = 200$$

per cui in base ai valori delle tabelle si assume il coefficiente di viscosità φ ≈ 2,40.

Tabella 11.2.VI – *Valori di $\phi(\infty, t_0)$. Atmosfera con umidità relativa di circa il 75%*

t_0	$h_0 \le 75$ mm	$h_0 = 150$	$h_0 = 300$	$h_0 \ge 600$
3 giorni	3,5	3,2	3,0	2,8
7 giorni	2,9	2,7	2,5	2,3
15 giorni	2,6	2,4	2,2	2,1
30 giorni	2,3	2,1	1,9	1,8
≥ 60giorni	2,0	1,8	1,7	1,6

Tabella 11.2.VII - *Valori di $\phi(\infty, t_0)$.Atmosfera con umidità relativa di circa il 55%*

t_0	$h_0 \le 75$ mm	$h_0 = 150$	$h_0 = 300$	$h_0 \ge 600$
3 giorni	4,5	4,0	3,6	3,3
7 giorni	3,7	3,3	3,0	2,8
15 giorni	3,3	3,0	2,7	2,5
30 giorni	2,9	2,6	2,3	2,2
≥ 60giorni	2,5	2,3	2,1	1,9

Procedendo con il calcolo della freccia mediante la stessa metodologia utilizzata per il calcolo a breve termine si avrà che il modulo elastico del calcestruzzo diventa:

$$E_{c,eff} = \frac{E_c}{(1+\varphi)} = \frac{29936}{(1+2{,}40)} = 8804\,MPa$$

ed il coefficiente di omogeneizzazione è:

$$n_{eff} = \frac{210000}{8804} = 22{,}7$$

- Calcolo delle caratteristiche della sezione non fessurata (Stadio 1):

Trascurando la differenza tra calcestruzzo teso si ricalcola la posizione del baricentro della sezione omogeneizzata come $x_1 = S_s/A$, essendo S_s il momento statico della sezione omogeneizzata rispetto al lembo superiore della sezione:

$$x_1 = \frac{Bh^2/2 + nA_{s1}\cdot d + nA_{s2}\cdot d'}{Bh + nA_{s1} + nA_{s2}} = \frac{300\cdot 570^2/2 + 22{,}7\cdot 615\cdot 570 + 22{,}7\cdot 308\cdot 30}{300\cdot 600 + 22{,}7\cdot 615 + 22{,}7\cdot 308} = 309\ mm$$

L'inerzia della sezione non fessurata è quindi pari a:

$$I_1 = \frac{B\cdot h^3}{12} + B\cdot h\cdot(0.5h - x_1)^2 + n\cdot A_{s2}\cdot(x_1 - d')^2 + n\cdot A_{s1}\cdot(d - x_1)^2$$

$$I_1 = \frac{300\cdot 570^2}{12} + 300\cdot 600\cdot(300-309)^2 + 22{,}7\cdot 615\cdot(570-309)^2 + 22{,}7\cdot 308\cdot(309-30)^2 =$$

$I_1 = 6911\cdot 10^6\ mm^4$

Tale valore è abbastanza maggiore del termine $I_1 = \frac{B\cdot h^3}{12}$ in quanto le armature sono omogeneizzate attraverso un coefficiente maggiore n = 22,7.

La freccia in stadio 1 al tempo t = 0 è quindi pari a:

$$\alpha_I = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{\frac{E_{cm}}{n_{eff}} \cdot I_1} \quad \alpha_I = \frac{5}{384} \cdot \frac{26 \cdot 10^{-3} \cdot 6000^4}{\frac{299360}{2,4} \cdot 6911 \cdot 10^6} = 7,2\ mm.$$

- Calcolo delle caratteristiche della sezione fessurata (Stadio 2):

L'asse neutro della sezione fessurata si calcola mediante l'annullamento del momento statico rispetto al baricentro della sezione parzializzata assumendo n = 22,7:

$$\frac{b \cdot x_2^{\ 2}}{2} + n \cdot A_{s2} \cdot (x_2 - c) - n \cdot A_{s1} \cdot (d - x_2) = 0$$

$$\frac{300 \cdot x_2^{\ 2}}{2} + 22,7 \cdot 308 \cdot (x_2 - 30) - 22,7 \cdot 615 \cdot (570 - x_2) = 0 \ \rightarrow x_2 = 174\ mm$$

L'inerzia della sezione parzializzata si calcola come:

$$I_2 = \frac{b \cdot x_2^{\ 3}}{3} + n \cdot A_{s2} \cdot (x_2 - d')^2 + n \cdot A_{s1} \cdot (d - x_2)^2$$

$$I_2 = \frac{300 \cdot 174^3}{3} + 22,7 \cdot 308 \cdot (174 - 30)^2 + 22,7 \cdot 615 \cdot (570 - 174)^2 \rightarrow I_2 = 2864 \cdot 10^6\ mm^4$$

La freccia in stadio 2 al tempo t = 0 è quindi pari a:

$$\alpha_{II} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{\frac{E_{cm}}{n_{eff}} \cdot I_2} \quad \alpha_I = \frac{5}{384} \cdot \frac{26 \cdot 10^{-3} \cdot 6000^4}{\frac{299360}{2,4} \cdot 2864 \cdot 10^6} = 17,4\ mm.$$

Il momento massimo agente in campata è:

$$M_{max} = 26 \cdot 6^2 / 8 = 117\ \mathrm{kN\,m}$$

$$M_{cr} = f_{ctm,fl} \frac{b \cdot h^2}{6} = 2,65 \frac{300 \cdot 600^2}{6} = 47.5\ \mathrm{kN\,m}$$

per cui $\frac{M_{cr}}{M} = \frac{47.5}{117} = 0.339 \qquad \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2 = 0,115$

Utilizzando l'espressione dell' EC2 si ha:

$$\alpha = \alpha_I \cdot \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^2 + \alpha_{II} \cdot \left[1 - \beta \cdot \left(\frac{M_{cr}}{M_s}\right)^2\right]$$

$$\alpha_\infty = 7,2 \cdot 0,5 \cdot 0,115 + 17,4 \cdot (1 - 0,5 \cdot 0,115) = 16,8\ mm$$

avendo assunto per carichi di lunga durata β = 0.5.

Per quanto concerne l'effetto del ritiro, applicando direttamente l'intera deformazione da ritiro sulla sezione fessurata, si ha:

$$S_c = \frac{x_2^{\,2} \cdot b}{2} = \frac{174^2 \cdot 300}{2} = 4532 \cdot 10^3 \; mm^3$$

La deformazione da ritiro si calcola con riferimento alle indicazioni delle NTC 2008. Assumendo una condizione di umidità relativa del 55-60%, una resistenza f_{ck} = 20 MPa, ed essendo h_0 = 200 *mm*, dalle tabelle 11.2Va e 11.2Vb si ha:

$$\varepsilon_{co} = -0{,}49 \;\text{ e }\; k_h = 0{,}85$$

f_{ck}	Deformazione da ritiro per essiccamento (in ‰)					
	Umidità Relativa (in %)					
	20	40	60	80	90	100
20	-0,62	-0,58	-0,49	-0,30	-0,17	+0,00
40	-0,48	-0,46	-0,38	-0,24	-0,13	+0,00
60	-0,38	-0,36	-0,30	-0,19	-0,10	+0,00
80	-0,30	-0,28	-0,24	-0,15	-0,07	+0,00

h_o [mm]	k_h
100	1.0
200	0.9
300	0.8
> 500	0.7

da cui si ottiene:

$$\varepsilon_{cd,\infty} = k_h \cdot \varepsilon_{c0} = -0{,}85 \cdot 0.49 = -0{,}417 \;\text{ (aliquota di ritiro da essiccamento ‰)}$$

La seconda aliquota di ritiro, detta di ritiro autogeno, si calcola:

$$\varepsilon_{ca,\infty} = -2{,}5 \cdot (f_{ck} - 10) \cdot 10^{-3} = -2{,}5 \cdot (20 - 10) \cdot 10^{-3} = -0.025 \;\; [‰]$$

La deformazione da ritiro complessiva è quindi pari a:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{cs} = -\,0{,}000417 - 0.000025 = -\,0{,}000442$$

$$\alpha_{sh} = \frac{1}{8} \cdot \frac{M_{sh}}{E_c I} \cdot L^2 = \varepsilon_{sh} \cdot \frac{S_c \cdot L^2}{8 \cdot I_2} = 0{,}000442 \cdot \frac{4532 \cdot 10^3 \cdot 6000^2}{8 \cdot 2864 \cdot 10^6} = 3{,}2 \; mm$$

e quindi la freccia totale a tempo infinito risulta:

$$\alpha_\infty = 16{,}8 + 3{,}2 = 20{,}0 \; mm$$

Si ha pertanto un rapporto freccia/luce pari a:

$$\frac{\alpha_\infty}{L} = \frac{20{,}0}{6000} = 0{,}0033 < 0{,}004 = 1/250$$