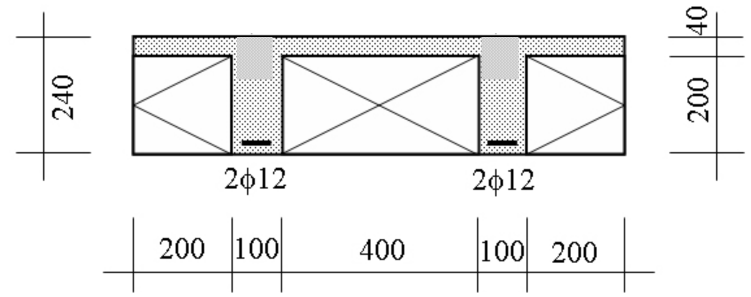
Si riporta di seguito la risoluzione di alcuni esercizi riguardanti il calcolo del momento resistente e del dominio di pressoflessione di sezioni in cemento armato. In tutte le applicazioni successive si è utilizzato per il calcestruzzo il legame rettangolo (*stress block*).

Esempio 1
Si consideri la sezione di un solaio latero-cementizio (1 m) di caratteristiche geometriche:

- altezza geometrica h = 240 mm;
- copriferro c = 40 mm;
- altezza utile d = 200 mm;
- interasse travetti i = 500 mm;
- spessore travetti t = 100 mm;
- altezza soletta s = 40 mm;



Sono impiegati un calcestruzzo di classe 25/30, caratterizzato da:

- f_{ck} = 25 MPa; $\sigma_{cd} = \dfrac{0{,}85 \cdot 25}{1{,}5} = 14{,}17\ \text{MPa}$

ed un acciaio B450C, caratterizzato da

- f_{yk} = 450 MPa; $f_{yd} = \dfrac{455}{1{,}15} = 391{,}3\ \text{MPa}$; E_s = 210 000 MPa.

Si procede al calcolo del valore del momento resistente in campata (momento positivo) supponendo un armatura inferiore (per singolo travetto): A_s = 2 ϕ 12 mm = 226 mm^2.

Nel caso di sezione a T, l'asse neutro può avere profondità tale da essere interno alla soletta o interno all'anima della sezione. Si ipotizza in prima istanza che l'asse neutro sia interno alla soletta; in tale caso la sezione a T può essere trattata come una sezione rettangolare di dimensioni b=1000mm h=240mm (salvo poi verificare che l'asse neutro sia interno alla soletta di spessore s=40mm). In tale ipotesi si ha:

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{bh\sigma_{cd}} = \frac{2 \cdot 226 \cdot 391{,}3}{1000 \cdot 240 \cdot 14{,}17} = 0{,}0520 \Rightarrow y = h \cdot \omega = 240 \cdot 0{,}0520 = 12{,}48\ \text{mm}$$

e quindi la profondità dell'asse neutro vale

$$x = 1.25y = 15{,}6\ \text{mm} < s$$

dunque l'asse neutro taglia la soletta e l'ipotesi assunta risulta valida. Il braccio della coppia interna vale pertanto:

$$d^* = d - 0{,}5y = 200 - 0{,}5 \cdot 12{,}48 = 193{,}76\ \text{mm}$$

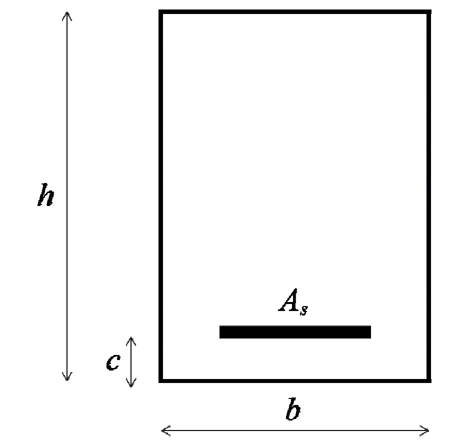
e quindi il momento resistente di progetto vale:

$$M_{Rd} = T \cdot d^* = A_s f_{yd}(d - 0{,}5y) = 226 \cdot 391{,}3 \cdot 193{,}76 = 17{,}13 \cdot 10^6\ \text{Nmm}\ (= 17{,}1\ \text{kNm})$$

Esempio 2

Si consideri una sezione in cemento armato di caratteristiche geometriche:

- base b = 400 mm;
- altezza geometrica h = 500 mm;
- altezza utile d = 460 mm;
- copriferro c = 40 mm;
- armatura in trazione A_s = 1500 mm^2;



Sono impiegati un calcestruzzo di classe 25/30, caratterizzato da:

- f_{ck} = 25 MPa; $\sigma_{cd} = \dfrac{0{,}85 \cdot 25}{1{,}5} = 14{,}17\ \text{MPa}$

ed un acciaio B450C, caratterizzato da

- f_{yk} = 450 MPa; $f_{yd} = \dfrac{455}{1{,}15} = 391{,}3\ \text{MPa}$; E_s = 210 000 MPa.

Si procede al calcolo del valore del momento resistente per la sezione in esame; si ha:

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{bh\sigma_{cd}} = \frac{1500 \cdot 391{,}3}{400 \cdot 500 \cdot 14{,}17} = 0{,}2071 \Rightarrow y = h \cdot \omega = 500 \cdot 0{,}2071 = 103{,}55\ \text{mm}$$

Il braccio della coppia interna vale pertanto:

$$d^* = d - 0{,}5y = 460 - 0{,}5 \cdot 103{,}55 = 408{,}23\ \text{mm}$$

e quindi il momento resistente di progetto vale:

$$M_{Rd} = T \cdot d^* = A_s f_{yd}(d - 0{,}5y) = 1500 \cdot 391{,}3 \cdot 408{,}23 = 239{,}61 \cdot 10^6\ \text{Nmm}\,(= 240\ \text{kNm})$$

- *Si supponga ora di considerare il legame elastico-incrudente per l'acciaio con k = 1.15 e k = 1.35.*

Caso a) $k = \dfrac{f_t}{f_y} = 1{,}15,\ kf_{yd} = 449{,}9\ \text{MPa}$

Il rapporto $\dfrac{x}{h}$ è determinabile attraverso la relazione:

$$0{,}8\left(\frac{x}{h}\right)^2 - \omega\left[1 - 0{,}08170\left(\frac{f_t}{f_y} - 1\right)\right]\frac{x}{h} - \omega \cdot 0{,}05332\left(\frac{f_t}{f_y} - 1\right)\frac{d}{h} = 0$$

$$0{,}8\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 0{,}2045\frac{x}{h} - 0{,}0015 = 0 \Rightarrow \frac{x}{h} = 0{,}263 \Rightarrow x = 0{,}263 \cdot 500 = 131{,}5\,\text{mm}$$

Il valore del momento resistente è pari a:

$$M_{Rd} = 0{,}8\sigma_{cd}bx(d - 0{,}4x) = 0{,}8 \cdot 14{,}17 \cdot 400 \cdot 131{,}5 \cdot (470 - 0{,}4 \cdot 131{,}5) = 248{,}88 \cdot 10^6\,\text{Nmm}\,(= 249\,\text{kNm})$$

l'utilizzo del legame elastico incrudente con k=1,15 ha apportato, pertanto, un incremento di momento resistente pari a:

$$\Delta = \frac{M_{Rd\,(k=1{,}15)}}{M_{Rd\,(k=1)}} = \frac{249}{240} = 1{,}037\ (\cong 3{,}7\%)$$

Caso b) $k = \dfrac{f_t}{f_y} = 1{,}35,\ kf_{yd} = 528{,}3\,\text{MPa}$

Si ha:

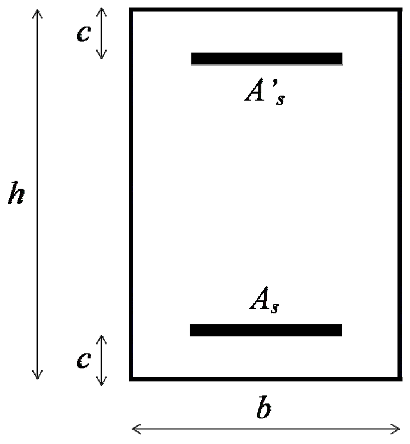
$$0{,}8\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 0{,}2011\frac{x}{h} - 0{,}0036 = 0 \Rightarrow \frac{x}{h} = 0{,}27 \Rightarrow x = 0{,}27 \cdot 500 = 135\,\text{mm}$$

$$M_{Rd} = 0{,}8\sigma_{cd}bx(d - 0{,}4x) = 0{,}8 \cdot 14{,}17 \cdot 400 \cdot 135 \cdot (470 - 0{,}4 \cdot 135) = 254{,}65 \cdot 10^6\,\text{Nmm}\,(= 255\,\text{kNm})$$

l'utilizzo del legame elastico incrudente con k=1,35 ha apportato, pertanto, un incremento di momento resistente pari a:

$$\Delta = \frac{M_{Rd\,(k=1{,}15)}}{M_{Rd\,(k=1)}} = \frac{255}{240} = 1{,}063\ (\cong 6{,}3\%)$$

- *Si supponga ora di aggiungere un'armatura in compressione A'_s = 500 mm^2; e si consideri per l'acciaio il legame elastico-plastico:*

- base b = 400 mm; - altezza geometrica h = 500 mm; - altezza utile d = 460 mm; - copriferro c = 40 mm; - armatura in trazione A_s = 1500 mm^2; - armatura in compressione A'_s = 500 mm^2.	

$$\omega' = \frac{A'_s\, f_{yd}}{bh\sigma_{cd}} = \frac{500 \cdot 391{,}3}{400 \cdot 500 \cdot 14{,}17} = 0{,}069$$

Supponendo entrambe le armature snervate, si può calcolare y come:

$$y = h \cdot (\omega - \omega') = 500 \cdot (0{,}207 - 0{,}0690) = 69{,}05\,\text{mm}$$

L'ipotesi di armatura compressa snervata va controllata; l'armatura compressa è in campo elastico solo se:

$$y \leq 1{,}68c = 67{,}2\,\text{mm}$$

e quindi, per il caso in esame, l'ipotesi di armatura compressa snervata è verificata.

La risultante di compressione è suddivisa nelle due componenti:

$$C_1 = \sigma_{cd} by = 14{,}17 \cdot 400 \cdot 69{,}05 = 391{,}38 \cdot 10^5 \text{ N}$$
$$C_2 = f_{yd} A'_s = 391{,}3 \cdot 500 = 1{,}96 \cdot 10^5 \text{ N}$$

con risultante posizionata ad una distanza dal lembo superiore pari a:

$$d_C = \frac{C_1 \cdot 0{,}5y + C_2 \cdot c}{C_1 + C_2} = \frac{391{,}38 \cdot 0{,}5 \cdot 69{,}5 + 1{,}96 \cdot 40}{391{,}38 + 1{,}96} = 34{,}77 \text{ mm}$$

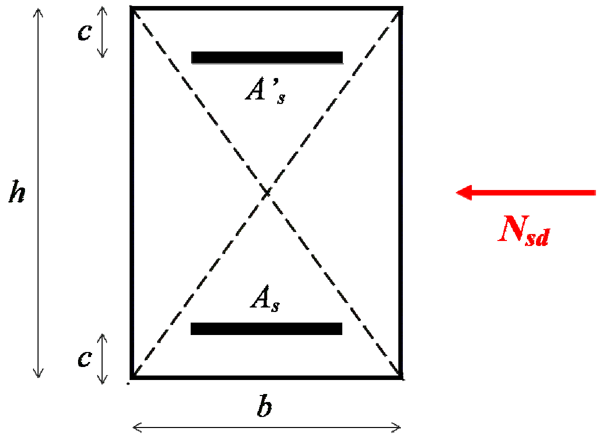
Quindi:

$$M_{Rd} = T \cdot d^* = A_s f_{yd} (d - d_c) = 1500 \cdot 391{,}3 \cdot (460 - 34{,}77) = 249{,}58 \cdot 10^6 \text{ Nmm} (= 250\,\text{kNm})$$

Esempio 3

Si consideri ancora la sezione dell'esempio 2 e si supponga di aggiungere uno sforzo normale N_{sd} pari a 700 kN; si ha:

- base b = 400 mm;
- altezza geometrica h = 500 mm;
- altezza utile d = 460 mm;
- copriferro c = 40 mm;
- armatura in trazione A_s = 1500 mm^2;
- armatura in compressione A'_s = 500 mm^2;
- Sforzo normale N_{sd} = 700 kN



$$\nu = \frac{N_{sd}}{bh\sigma_{cd}} = \frac{700 \cdot 10^{-3}}{400 \cdot 500 \cdot 14{,}17} = 0{,}247$$

Supponendo entrambe le armature snervate, si può calcolare y come:

$$y = h \cdot (\nu + \omega - \omega') = 500 \cdot (0{,}247 + 0{,}2071 - 0{,}0690) = 192{,}55 \text{ mm}$$

L'ipotesi di armatura compressa snervata va controllata; l'armatura compressa è in campo elastico solo se:

$$y \leq 1{,}68c = 67{,}2 \text{ mm}$$

e quindi, per il caso in esame, l'ipotesi di armatura compressa snervata è verificata.

Inoltre, poiché risulta:

$$y < 0{,}522d = 240{,}12 \text{ mm}$$

anche l'ipotesi di armatura tesa snervata è verificata.

Quindi:

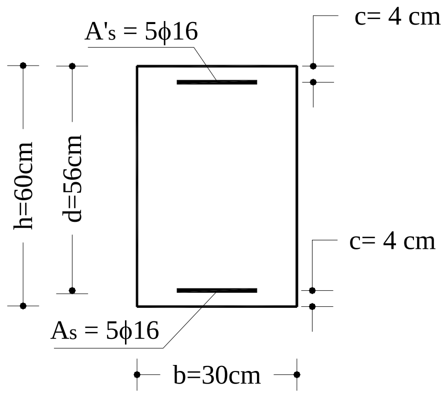
$$M_{Rd} = yb\sigma_{cd}\left(\frac{h-y}{2}\right) + f_{yd}(A_s + A'_s)\left(\frac{h}{2} - c\right) =$$

$$= 192{,}55 \cdot 400 \cdot 14{,}17 \cdot \left(\frac{500 - 192{,}55}{2}\right) + 391{,}3 \cdot (1500 + 500) \cdot (250 - 40) = 332 \cdot 10^6 \text{ Nmm } (= 332 \text{ kNm})$$

Esempio 4

Si consideri una sezione in cemento armato di caratteristiche geometriche:

- base b = 300 mm;
- altezza geometrica h = 600 mm;
- altezza utile d = 560 mm;
- copriferro c = 40 mm;
- armatura simmetrica (5ϕ16 = 10.05 cm^2);



Sono impiegati un calcestruzzo di classe 25/30, caratterizzato da:

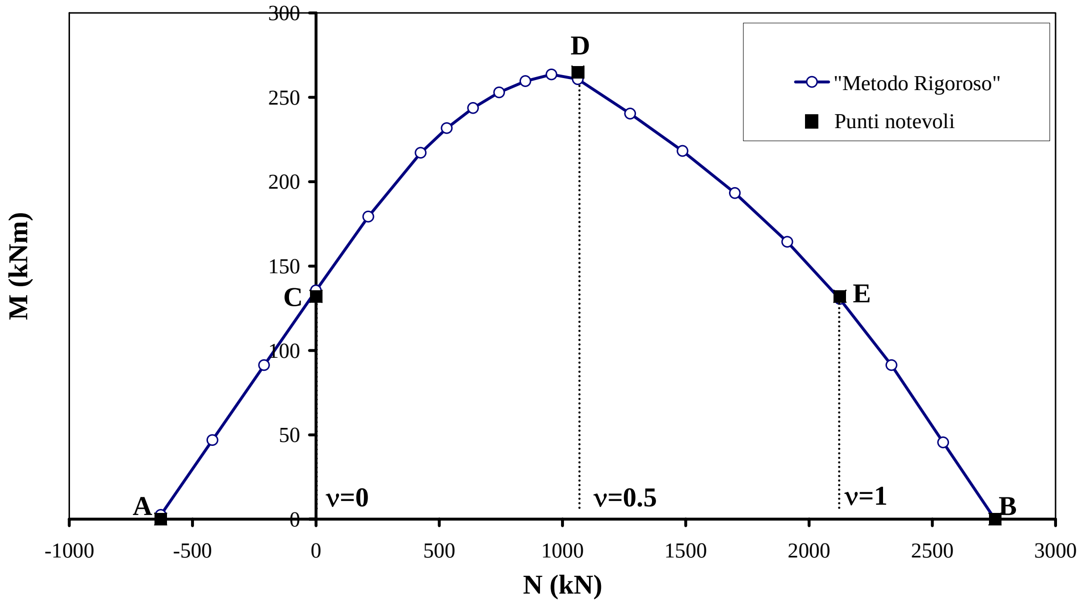
- f_{ck} = 25 MPa; $\sigma_{cd} = \dfrac{0{,}85 \cdot 25}{1{,}5} = 14{,}17 \text{ MPa}$

ed un acciaio B450C, caratterizzato da

- f_{yk} = 450 MPa; $f_{yd} = \dfrac{455}{1{,}15} = 391{,}3 \text{ MPa}$; E_s = 210 000 MPa.

Si vogliono determinare le coordinate dei punti notevoli del dominio M-N (punti A-B- C-D-E).

Dominio M-N



Punto A – (Trazione centrata)

$$N_{Rd}^{A} = -2A_s f_{yd} = -2 \cdot 1005 \cdot 391{,}3 = 786513 N = -786\,\text{kN}; M_{Rd}^{A} = 0$$

Punto B (Compressione centrata)

$$N_{Rd}^{B} = 2A_s f_{yd} + bh\sigma_{cd} = 2 \cdot 1005 \cdot 391{,}3 + 300 \cdot 600 \cdot 14{,}17 =$$
$$= 786513 + 2550600 = 3337113\ \text{N} = 3337\,\text{kN}; M_{Rd}^{B} = 0$$

Punto C (Flessione semplice) e Punto E

Il momento resistente può essere determinato in via approssimata mediante la seguente espressione:

$$M_{Rd}^{C} = M_{Rd}^{E} = A_s f_{yd} (h - 2c) = 1005 \cdot 391{,}3 \cdot (600 - 80) = 204493380\ \text{Nmm} = 204{,}5\,\text{kN m}$$

Si supponga adesso di voler effettuare il calcolo in via rigorosa.

Si osservi che in caso di armatura simmetrica è impossibile che l'armatura compressa sia snervata in quanto in tal caso si arriverebbe all'assurdo che non ci sarebbe bisogno di calcestruzzo compresso per l'equilibrio. Dunque in caso di armatura simmetrica sicuramente la profondità y deve rispettare la disuguaglianza $y \le 1{,}68c$ (ovvero armatura compressa in campo elastico).

cls $\qquad C_1 = yb\sigma_{cd} = 0.8xb\sigma_{cd}$

acciao superiore $\qquad C_2 = A'_s\,\sigma_s = A'_s\,E_s\varepsilon'_s = A'_s\,E_s\varepsilon_{cu}\left(\dfrac{y-0{,}8c}{y}\right) = A'_s\,E_s\varepsilon_{cu}\left(1-\dfrac{c}{x}\right)$

(sfruttando la linearità del diagramma delle ε)

acciaio inferiore $\qquad T = A_s f_{yd}$

Eq. alla traslazione della sezione:

$$C_1 + C_2 + T = 0 \Leftrightarrow 0.8xb\sigma_{cd} + A'_s\,E_s\varepsilon_{cu}\left(1-\frac{c}{x}\right) - A_s f_{yd} = 0$$

moltiplicando tutto per x e sostituendo i valori numerici:

$$0.8b\sigma_{cd}x^2 + \left(A'_s\,E_s\varepsilon_{cu} - A_s f_{yd}\right)x - A'_s\,E_s\varepsilon_{cu}c = 0$$

$$3401x^2 + 345418x - 2{,}95 \cdot 10^7 = 0$$

La soluzione accettabile (> 0) è:

$$x = \frac{-345418 + \sqrt{(345418^2 + (4 \cdot 3401 \cdot 2{,}95 \cdot 10^7)}}{2 \cdot 3401} = 55{,}30\,mm$$

e quindi risulta $\varepsilon'_s = \dfrac{x-c}{x}\varepsilon_{cu} = \dfrac{55{,}30-40}{55{,}30} \cdot 0{,}0035 =$ 0,00097 < ε_{sy} (= 0,00186).

In definitiva:

$T = A_s f_{yd} = 1005 \cdot 391{,}3 = 393256\ N = 393\ \mathrm{kN}$

$C_1 = 0{,}8 x b \sigma_{cd} = 0{,}8 \cdot 55{,}30 \cdot 300 \cdot 14{,}17 = 188064 N = 188\ \mathrm{kN}$

$$C_2 = A'_s\, E_s \varepsilon_{cu} \left(1 - \frac{c}{x}\right) = 1005 \cdot 210000 \cdot 0.0035 \cdot \left(1 - \frac{40}{55{,}30}\right) = 204371 N = 204\ \mathrm{kN}$$

La risultante di compressione è posizionata a distanza dal lembo superiore pari a:

$$d_C = \frac{C_1 \cdot 0{,}4x + C_2 \cdot c}{C_1 + C_2} = \frac{188 \cdot 0{,}4 \cdot 55{,}30 + 204 \cdot 40}{188 + 204} = 31{,}4\,\mathrm{mm}$$

e quindi il braccio della coppia interna risulta pari a:

$d^* = d - d_C = 560 - 31{,}4 = 529\ \mathrm{mm} = 0{,}529\ \mathrm{m}$

Dunque:

$M_{Rd}^{C} = M_{Rd}^{E} = T \cdot d^* = 393 \cdot 0.529 = 207{,}8\ \mathrm{kN\ m}$

Dunque il calcolo per via approssimata conduce ad una sottostima del momento resistente pari a

$$\Delta = 1 - \frac{204{,}5}{207{,}8} = 1 - 0{,}98 = 0{,}02\,(\cong 2\%)$$

Punto E

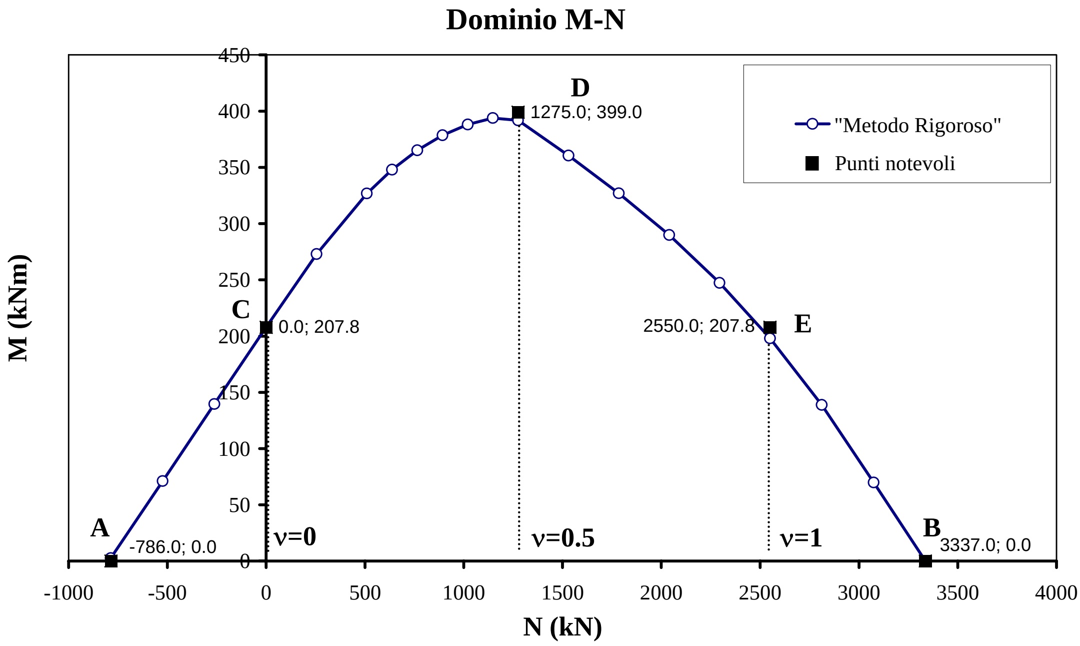
$N_{Rd}^{E} = bh\sigma_{cd} = 300 \cdot 600 \cdot 14{,}17 = 2550600\ \mathrm{N} = 2550\,\mathrm{kN}$

$M_{Rd}^{C} = M_{Rd}^{E} = 207{,}8\ \mathrm{kN\ m}$

Punto D

$$N_{Rd}^{D} = \frac{N_{Rd}^{E}}{2} = 1275\,\mathrm{kN}$$

$$M_{Rd}^{D} = M_{Rd}^{C} + \frac{N_{Rd}^{E}}{2} \cdot \frac{h}{4} = 207{,}8 + \frac{2550}{2} \cdot \frac{0{,}6}{4} = 399{,}0\ \mathrm{kN\ m}$$



Un'ottima approssimazione del dominio (rispetto a quello ottenuto per via rigorosa si può avere:

- unendo i punti A-C
- utilizzando l'espressione $M_{Rd} = A_s f_{yd}(h-2c) + N\frac{h}{2}\left(1-\frac{N}{N_c}\right) = A_s f_{yd}(h-2c) + N\frac{h}{2}(1-\nu)$

  nel tratto C-D
- unendo i punti D-E-B